

Cuprins

1	Numere reale	7
1.1	Numere reale	7
1.2	Mulțimi numărabile	13
2	Spații metrice	17
2.1	Spații metrice	17
2.2	Spații vectoriale	22
2.3	Topologia indusă de o metrică	25
2.4	Convergența în spații metrice	30
2.5	Puncte limită și limite extreme ale unui șir din \mathbb{R}	40
3	Funcții continue	43
3.1	Funcții continue	43
3.2	Limite iterate	49
3.3	Mulțimi compacte	50
3.4	Continuitate pe compacte	53
3.5	Mulțimi conexe	54
3.6	Continuitate pe conexe	54
3.7	Funcții uniform continue	56
3.8	Aplicații liniare și continue	57
4	Diferențiabilitate	63
4.1	Funcții diferențiabile	63
4.2	Derivate parțiale	65
4.3	Derivata după o direcție	71
4.4	Proprietăți ale funcțiilor diferențiabile și ale derivatelor parțiale	72
4.5	Diferențiabilitatea funcțiilor compuse	73
4.6	Derivate parțiale de ordin superior	81
4.7	Formula lui Taylor pentru funcții de o variabilă reală	86
4.8	Formula lui Taylor pentru funcții de mai multe variabile	90
4.9	Puncte de extrem	94
4.10	Difeomorfisme. Teorema de inversiune locală	97
4.11	Funcții implicite	101
4.12	Extreme cu legături	105
4.13	Metoda celor mai mici pătrate pentru aproximarea unei funcții	114
4.14	Metoda gradientului	116

5	Serii numerice	119
5.1	Serii numerice	119
5.2	Proprietăți ale seriilor numerice și ale sumelor parțiale	121
5.3	Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare	123
5.4	Serii alternate	124
5.5	Serii absolut convergente	125
5.6	Serii cu termeni pozitivi	128
5.7	Produsul convolutiv a două serii	137
6	Șiruri de funcții. Serii de funcții. Serii de puteri	141
6.1	Șiruri de funcții	141
6.2	Proprietăți ale șirurilor de funcții	144
6.3	Serii de funcții	147
6.4	Criterii de convergență uniformă pentru serii de funcții	148
6.5	Proprietăți ale seriilor de funcții	149
6.6	Serii de puteri	151
6.7	Proprietăți ale seriilor de puteri	154
6.8	Seria Taylor. Dezvoltări în serii	158
7	Integrale generalizate	163
7.1	Integrale generalizate	163
7.2	Proprietăți ale integralelor improprii	165
7.3	Criterii de convergență	165
8	Integrale curbilinii	171
8.1	Drumuri. Curbe	171
8.2	Integrala curbilinie în raport cu lungimea arcului	177
8.3	Calculul integralei curbilinii în raport cu lungimea arcului	178
8.4	Integrala curbilinie în raport cu coordonatele	180
8.5	Calculul integralei curbilinii în raport cu coordonatele	181
8.6	Proprietățile integralei curbilinii	184
8.7	Independența de drum a integralei curbilinii în raport cu coordonatele	184
8.8	Aplicații ale integralelor curbilinii	187
9	Integrale duble	189
9.1	Mulțimi măsurabile Jordan	189
9.2	Integrala dublă. Noțiuni introductive	192
9.3	Proprietăți ale sumelor Darboux și Riemann	193
9.4	Proprietățile integralei duble	195
9.5	Calculul integralelor duble	197
9.6	Formula lui Green	201
9.7	Exprimarea ariei unui domeniu cu ajutorul unei integrale curbilinii	204
9.8	Schimbarea de variabilă la integrala dublă	205
9.9	Aplicații ale integralei duble	208

10	Integrale de suprafață	211
10.1	Pânze parametrizate. Suprafețe	211
10.2	Aria unei suprafețe	214
10.3	Integrale de suprafață	217
10.4	Integrala de suprafață în raport cu coordonatele	219
10.5	Formula lui Stokes	222
11	Integrala triplă	225
11.1	Mulțimi din spațiu măsurabile Jordan	225
11.2	Integrala triplă	226
11.3	Criterii de integrabilitate	228
11.4	Calculul integralei triple	229
11.5	Formula lui Gauss - Ostrogradsky	233
11.6	Schimbarea de variabilă la integrala triplă	235
11.7	Aplicații ale integralelor triple	238
12	Serii Fourier	241
12.1	Serii Fourier	241
12.2	Operații cu serii Fourier	249
	Bibliografie	253
	Glosar	254

Capitolul 1

Numere reale

1.1 Numere reale

Definiția 1.1.1 Fie A o mulțime nevidă. Se numește relație binară pe A orice submulțime a produsului cartezian $R \subseteq A \times A$.

Pentru $x, y \in A$ în loc de $(x, y) \in R$ vom scrie $x R y$ și spunem că x este în relația R cu y .

Definiția 1.1.2 O relație binară R pe A se numește relație de ordine dacă se verifică următoarele axiome:

1. $\forall x \in A \ x R x$ (reflexivitatea),
2. Dacă $x R y$ și $y R x$, unde $x, y \in A$, atunci $x = y$ (antisimetria),
3. Dacă $x R y$ și $y R z$, unde $x, y, z \in A$, atunci $x R z$ (tranzitivitatea).

Dacă în plus $\forall x, y \in A \ x R y$ sau $y R x$, atunci relația R se numește relație de ordine totală.

O mulțime A pe care s-a definit o relație de ordine R se numește mulțime ordonată și se notează prin (A, R) sau A atunci când se subînțelege care este relația de ordine.

Fie A o mulțime ordonată pe care s-a definit relația de ordine notată \leq . Dacă $B \subset A$ este o submulțime nevidă a lui A , atunci orice element $a \in A$ pentru care $x \leq a$ (respectiv $a \leq x$) oricare ar fi $x \in B$ se numește majorant (respectiv minorant) al mulțimii B în A . Dacă submulțimea B admite cel puțin un majorant, respectiv un minorant ea se numește majorată (mărginită superior), respectiv minorată (mărginită inferior) în A . Mulțimea B se numește mărginită, dacă este atât minorată, cât și majorată. Dacă mulțimea B admite un majorant, respectiv un minorant ce aparține lui B acesta se numește cel mai mare element, respectiv cel mai mic element notat cu $\max B$, respectiv $\min B$.

Cel mai mic majorant al mulțimii B se numește margine superioară exactă sau supremum și se notează cu $\sup B$.

$b \in A, \ b = \sup B \Leftrightarrow x \leq b, \ \forall x \in B$ (b este un majorant al mulțimii B) și dacă $b' \in A$ astfel încât $x \leq b', \ \forall x \in B$, atunci $b \leq b'$ (b este cel mai mic majorant al mulțimii B).

Cel mai mare minorant al mulțimii B se numește margine inferioară exactă sau infimum și se notează cu $\inf B$.

$a \in A, \ a = \inf B \Leftrightarrow a \leq x, \ \forall x \in B$ (a este un minorant al mulțimii B) și dacă $a' \in A$ astfel încât $a' \leq x, \ \forall x \in B$, atunci $a' \leq a$ (a este cel mai mare minorant al mulțimii B).

Observația 1.1.1 1. Dacă există $\inf B$ și $\sup B$ nu rezultă neapărat că $\inf B, \sup B \in B$.

2. Dacă există $\inf B$ și $\sup B$ conform proprietății de antisimetrie acestea sunt unic determinate.

Exemplu 1.1.1 1. Dacă $A = \mathbb{R}$ și $B = [0, 1)$, atunci orice $a \geq 1$ este un majorant pentru B și orice $b \leq 0$ este un minorant pentru B . În acest caz $\inf B = 0 \in B$, $\sup B = 1 \notin B$, iar 0 este cel mai mic element al lui B .

2. Dacă $A = \mathbb{R}$ și $B = \mathbb{N}$, atunci orice $b \leq 0$ este un minorant al lui B , dar nici un element $a \in \mathbb{R}$ nu este majorant pentru \mathbb{N} ; $\inf \mathbb{N} = 0$, $\sup \mathbb{N}$ nu există în \mathbb{R} .

Dacă $B = \mathbb{Z}$ atunci nu există nici majoranți nici minoranți; nu există $\inf \mathbb{Z}$ și $\sup \mathbb{Z}$ în \mathbb{R} .

Definiția 1.1.3 axiomatică a numerelor reale

Fie K o mulțime pe care sunt definite operațiile de adunare și înmulțire:

$$\begin{aligned} +, \cdot : K \times K &\rightarrow K, \\ (x, y) &\rightarrow x + y \\ (x, y) &\rightarrow xy \end{aligned}$$

și o relație de ordine $x \leq y$ între elementele lui K , care satisfac următoarele axiome:

A1) $(K, +, \cdot)$ este un corp comutativ, adică

1. " + " este asociativă: $\forall x, y, z \in K \quad (x + y) + z = x + (y + z)$,
2. " + " este comutativă: $\forall x, y \in K \quad x + y = y + x$,
3. există în K elementul 0 pentru care $x + 0 = x$, $\forall x \in K$,
4. $\forall x \in K$, $\exists -x \in K$ astfel încât: $x + (-x) = 0$,
5. " · " este asociativă: $\forall x, y, z \in K \quad (xy)z = x(yz)$,
6. " · " este comutativă: $\forall x, y \in K \quad xy = yx$,
7. există în K , elementul 1 pentru care $x1 = x$, $\forall x \in K$,
8. $\forall x \in K$, $x \neq 0$, $\exists x^{-1} \in K$ astfel încât $xx^{-1} = 1$,
9. " · " este distributivă față de " + ": $\forall x, y, z \in K \quad x(y + z) = xy + yz$.

A2.) " \leq " este o relație de ordine totală pe K , care este compatibilă cu operațiile algebrice " + " și " · ";

1. " \leq " este reflexivă: $x \leq x$, $\forall x \in K$,
2. " \leq " este antisimetrică: $\forall x, y \in K$, dacă $x \leq y$ și $y \leq x \Rightarrow x = y$,
3. " \leq " este tranzitivă: $\forall x, y, z \in K$, dacă $x \leq y$ și $y \leq z \Rightarrow x \leq z$,
4. $\forall x, y \in K \quad x \leq y$ sau $y \leq x$,
5. $\forall x, y, z \in K$, dacă $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
6. $\forall x, y, z \in K$ și $0 \leq z$, dacă $x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$.

A3) Orice submulțime nevidă și majorată a lui K admite o margine superioară exactă (axioma marginii superioare sau axioma Cantor - Dedekind).

Observația 1.1.2 1. Orice mulțime ce verifică $A1$, $A2$ și $A3$ este izomorfă cu mulțimea K , pe care o vom nota \mathbb{R} și care se numește mulțimea numerelor reale.

2. Ultima axiomă din definiția 1.1.3 constituie punctul de plecare în stabilirea rezultatelor de bază ale analizei matematice, ceea ce o separă de algebră.

Teorema 1.1.1 regula semnelor în \mathbb{R} .

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 0 \Rightarrow -x < 0;$
 $x < 0 \Rightarrow -x > 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x > 0, y > 0 \Rightarrow xy > 0$
 $x > 0, y < 0 \Rightarrow xy < 0$
 $x < 0, y < 0 \Rightarrow xy > 0;$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$
 $1 \neq 0 \Rightarrow 1 > 0;$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$
 $x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < 0;$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \geq 0, y \geq 0$ și $x + y = 0 \Rightarrow x = 0$ și $y = 0$.

DEMONSTRAȚIE:

1. Dacă $x > 0$, $0 = (-x) + x > (-x) + 0 = -x \Rightarrow -x < 0$
 Dacă $x < 0$, $0 = (-x) + x < (-x) + 0 = -x \Rightarrow -x > 0$.
2. Dacă $x > 0$ și $y > 0$, atunci $xy > x \cdot 0 = 0 \Rightarrow xy > 0$.
 Dacă $x > 0$ și $y < 0$, atunci $x > 0$ și $-y > 0$, deci $x(-y) > 0 \Rightarrow -xy > 0 \Rightarrow xy < 0$; $x < 0$ și $y < 0 \Rightarrow x < 0$ și $-y > 0 \Rightarrow -xy < 0 \Rightarrow xy > 0$.
3. Dacă $x \neq 0$, atunci $x^2 = x \cdot x \Rightarrow \begin{cases} \text{dacă } x > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \\ \text{dacă } x < 0 \Rightarrow x^2 > 0. \end{cases}$ Cum $1 \neq 0 \Rightarrow 1^2 > 0 \Rightarrow 1 > 0$
4. Dacă $x > 0$, $1 = x \cdot \frac{1}{x} > 0$. Presupunând că $\frac{1}{x} < 0$, rezultă $1 = x \cdot \frac{1}{x} < 0$, ceea ce este fals, deci $\frac{1}{x} > 0$.
 Dacă $x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < 0$ se arată în mod analog.
5. Dacă $x \geq 0$, $y \geq 0$ și $x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -y \geq 0 \Rightarrow y \leq 0$ și, cum $y \geq 0$, rezultă $y = 0$, care împreună cu $x + y = 0$ ne dă $x = 0$.

Definiția 1.1.4 O submulțime $I \subset \mathbb{R}$ se numește inductivă dacă $0 \in I$ și pentru orice $x \in I \Rightarrow x + 1 \in I$.

Teorema 1.1.2 Există o singură submulțime $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ numită mulțimea numerelor naturale, care are următoarele proprietăți:

1. $0 \in \mathbb{N}$;
2. Dacă $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 1 \in \mathbb{N}$;
3. Dacă $A \subset \mathbb{R}$ cu $0 \in A$ și $x \in A \Rightarrow x + 1 \in A$, atunci $\mathbb{N} \subseteq A$.

DEMONSTRAȚIE: Unicitatea. Presupunem că există două mulțimi \mathbb{N} și M care satisfac condițiile din ipoteză. Conform proprietății 3 din enunț avem $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ cu $\left. \begin{array}{l} 0 \in \mathbb{N} \\ x \in \mathbb{N} \Rightarrow x+1 \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow M \subseteq \mathbb{N}$. De asemenea avem $M \subset \mathbb{R}$ cu $\left. \begin{array}{l} 0 \in M \\ x \in M \Rightarrow x+1 \in M \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbb{N} \subset M$, adică $M = \mathbb{N}$.

Existența. Considerăm mulțimea $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid 0 \in A, \text{ dacă } x \in A \Rightarrow x+1 \in A\} \neq \emptyset$. Dacă $\mathbb{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$, atunci $0 \in \mathbb{N}$.

Fie $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow x \in A, \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow x+1 \in A, \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow x+1 \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \Rightarrow x+1 \in \mathbb{N}$.

Din $\mathbb{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ pentru orice $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq A$.

Observația 1.1.3 a) Mulțimea \mathbb{N} este cea mai mică mulțime inductivă din \mathbb{R} (relativ la incluziune).

b) Avem $0 \in \mathbb{N}, 0+1=1 \in \mathbb{N}, 1+1=2 \in \mathbb{N}, \dots$,

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$.

c) Folosind noțiunea de mulțime inductivă, se poate enunța principiul inducției matematice astfel: Dacă $S \subseteq \mathbb{N}$ este o mulțime inductivă, atunci $S = \mathbb{N}$.

Proprietăți remarcabile ale mulțimii numerelor naturale \mathbb{N}

Teorema 1.1.3 1. Pentru orice $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq 0$. Dacă $x \in \mathbb{N}, x \neq 0$ atunci $\exists y \in \mathbb{N}$ astfel încât $x = y+1$.

2. Pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$ cu $x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{N}$ astfel încât $y = x+z$.

3. Pentru orice $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x+y \in \mathbb{N}$ și $xy \in \mathbb{N}$.

DEMONSTRAȚIE.

1. Notăm $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ mulțimea numerelor reale pozitive; $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ și $0 \in \mathbb{R}$;

$x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x+1 \in \mathbb{R}_+$. Din teorema 1.1.2 rezultă că $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+$, adică pentru orice $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{R}_+$.

Mulțimea $A = \{0\} \cup \{x+1 \mid x \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$. Evident $0 \in A$ și dacă $x \in A \Rightarrow x+1 \in A$. Din teorema 1.1.2 obținem $\mathbb{N} \subseteq A$, deci $A = \mathbb{N}$. Așadar pentru orice $x \in \mathbb{N}, x \neq 0$ avem $x \in \{y+1 \mid y \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \exists y \in \mathbb{N}$ astfel încât $x = y+1$.

2. Mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{dacă } x < y, \exists z \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } x+z=y\} \subseteq \mathbb{N}$. Fie $y \in \mathbb{N}$ cu $0 < y \Rightarrow 0+y=y \Rightarrow 0 \in A$. Fie $x \in A$; dacă $x \in \mathbb{N}$ și $x+1 < y \Rightarrow y \neq 0$ și cum $y \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists y' \in \mathbb{N}$ astfel încât $y = y'+1$.

Cum $x+1 < y \Rightarrow x+1 < y'+1 \Rightarrow x < y'$ care împreună cu $x \in A$ ne dă că $\exists z \in \mathbb{N}$ astfel încât $x+z=y' \Rightarrow (x+1)+z=(x+z)+1=y'+1=y$. Deci $\exists z \in \mathbb{N}$ astfel încât $(x+1)+z=y \Rightarrow x+1 \in A$.

Deoarece mulțimea A satisface proprietățile: $0 \in A$ și dacă $x \in A \Rightarrow x+1 \in A$, atunci conform teoremei 1.1.2 $\mathbb{N} \subseteq A$, de unde $A = \mathbb{N}$.

3. Fie $x \in \mathbb{N}$ și $A = \{y \in \mathbb{N} \mid x+y \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$. Cum $x = x+0 \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \in A$. Dacă $y \in A \Rightarrow x+y \in \mathbb{N} \Rightarrow (x+y)+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow x+(y+1) \in \mathbb{N} \Rightarrow y+1 \in A$.

Deoarece mulțimea A satisface proprietățile: $0 \in A$ și dacă $y \in A \Rightarrow y+1 \in A$, atunci conform teoremei 1.1.2 $\mathbb{N} \subseteq A$, de unde $A = \mathbb{N}$.

Fie $x \in \mathbb{N}$ și $A = \{y \in \mathbb{N} | xy \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$. Din $0 = x0 \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \in A$. Dacă $y \in A \Rightarrow xy \in \mathbb{N}$; $x(y+1) = xy + x \in \mathbb{N}$, deoarece $xy, x \in \mathbb{N}$, deci $y+1 \in A$. Deoarece mulțimea A satisface proprietățile: $0 \in A$ și dacă $y \in A \Rightarrow y+1 \in A$, atunci conform teoremei 1.1.2 $\mathbb{N} \subseteq A$, de unde $A = \mathbb{N}$.

Teorema 1.1.4 *Mulțimea numerelor naturale este bine ordonată, adică orice submulțime nevidă a lui \mathbb{N} , $A \subseteq \mathbb{N}$ are un cel mai mic element.*

DEMONSTRAȚIE. Dacă $0 \in A \Rightarrow 0$ este cel mai mic element al lui A , deci \mathbb{N} este bine ordonată.

Dacă $0 \notin A$ considerăm mulțimea $B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ este minorant al lui } A\} = \{x \in \mathbb{N} | x < y, \forall y \in A\} \subset \mathbb{N}$, $B \neq \emptyset$, ($0 \in B$). B nu are proprietatea: dacă $x \in B \Rightarrow x+1 \in B$, deoarece în acest caz ar rezulta $B = \mathbb{N}$, ceea ce este fals. Prin urmare $\exists x \in B$ astfel încât $x+1 \notin B$. Arătăm că $x+1$ este cel mai mic element al mulțimii A .

Din $x \in B \Rightarrow x < y, \forall y \in A \Rightarrow x+1 \leq y, \forall y \in B$ adică $x+1$ este minorant al lui A . Din $x+1 \notin B \Rightarrow \exists y_0 \in A$ astfel încât $y_0 \leq x+1$ care împreună cu $x+1 \leq y, \forall y \in B$ ne dă $x+1 = y_0 \in A$, deci $x+1 \in A$, și cum $x+1$ este minorant al lui A , $x+1$ este cel mai mic element al mulțimii A .

Obținem astfel că mulțimea numerelor naturale \mathbb{N} este bine ordonată.

Teorema 1.1.5 *Proprietatea lui Arhimede (287 - 212 î.e.n.).*

Mulțimea \mathbb{N} a numerelor naturale nu este majorată în \mathbb{R} , adică pentru orice $x \in \mathbb{R}$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x < n$.

DEMONSTRAȚIE. Presupunem că există $x \in \mathbb{R}$ care să majoreze mulțimea numerelor naturale. \mathbb{N} fiind o submulțime nevidă majorată a lui \mathbb{R} , conform axiomei lui Cantor-Dedekind, rezultă că există $\sup \mathbb{N} = \alpha$ astfel ca $n \leq \alpha$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Cum $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \leq \alpha \Rightarrow n \leq \alpha-1 < \alpha$ ceea ce contrazice definirea lui α ca fiind cel mai mic dintre majoranții lui \mathbb{N} , deci \mathbb{N} nu este majorată în \mathbb{R} .

Observația 1.1.4 *Spunem despre corpul numerelor reale că este un corp arhimedian (are loc axioma lui Arhimede).*

Dacă considerăm ecuația

$$a + x = b, \quad (1.1)$$

unde $a, b \in \mathbb{N}$, observăm că pentru $b < a$ această ecuație nu are soluții numere naturale. Din (1.1) $x = b - a$, deci operația inversă adunării, scăderea, nu conduce întotdeauna la un număr natural. Ecuația (1.1) va avea întotdeauna soluție într-o mulțime pe care o vom nota \mathbb{Z} , care este alcătuită din elementele $\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots$ și care se numește mulțimea numerelor întregi. Avem $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}, +)$ este grup comutativ, iar (\mathbb{Z}, \cdot) este semigrup comutativ cu unitate, așadar $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este inel comutativ cu unitate. Mulțimea numerelor întregi este total ordonată față de relația de ordine \leq .

Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ ecuația

$$ax = b \quad (1.2)$$

nu are soluții numere întregi decât atunci, când $a|b$. Din (1.2) $x = \frac{b}{a}$, deci operația inversă înmulțirii, împărțirea, nu conduce întotdeauna la un număr întreg. Ecuația (1.2) va avea întotdeauna soluție într-o mulțime pe care o vom nota \mathbb{Q} , numită mulțimea numerelor raționale și care este alcătuită din mulțimea numerelor întregi și mulțimea numerelor de forma $\frac{b}{a}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$,

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{b}{a} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0 \right\}$. Orice număr întreg b se poate scrie ca fracție de forma $\frac{b}{1}$. Prin urmare $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Mulțimea numerelor raționale \mathbb{Q} este corp comutativ în raport cu adunarea și înmulțirea și este ordonată față de relația de ordine \leq .

Dacă pentru $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$ ecuațiile (1.1) și (1.2) au soluții numere raționale, ecuația $x^2 = a$ nu are întotdeauna soluție rațională. De exemplu, pentru $a = 2$ nu există nici un număr rațional al cărui pătrat să fie 2. Presupunem că ar exista $x \in \mathbb{Q}$ astfel ca

$$x^2 = 2. \quad (1.3)$$

Îl considerăm pe x scris sub formă de fracție ireductibilă, adică $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $(p, q) = 1$.

Din (1.3) obținem

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2, \quad (1.4)$$

deci p^2 trebuie să fie număr par, adică p este număr par, $p = 2m$. Înlocuind în (1.4), avem $4m^2 = 2q^2$, de unde $2m^2 = q^2$, adică q^2 este un număr par, deci și q este un număr par $q = 2m$. Atunci $(p, q) = (2m, 2n) = 2(m, n) \neq 1$, ceea ce contrazice ipoteza făcută asupra lui p și q .

Numerele reale care nu sunt raționale se numesc numere iraționale.

Definiția 1.1.5 O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numește densă în sensul ordinii în \mathbb{R} , dacă pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ $x < y$ există $a \in A$ astfel încât $x < a < y$.

Teorema 1.1.6 Mulțimea \mathbb{Q} a numerelor raționale este densă în sensul ordinii în \mathbb{R} .

DEMONSTRAȚIE: Fie $x, y \in \mathbb{R}$ $x < y$ și notăm $\alpha = y - x > 0$. Atunci conform teoremei 1.1.5 există $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ astfel încât $\frac{1}{\alpha} < n$, de unde $\frac{1}{n} < \alpha$.

Considerăm mulțimea $A = \left\{ p \in \mathbb{N} \mid \frac{p}{n} \geq y \right\} \neq \emptyset$ și fie m cel mai mic element din A . Avem $\frac{m}{n} \geq y$ și $\frac{m-1}{n} < y$. Din $\frac{m}{n} \geq y \Rightarrow \frac{m-1}{n} \geq y - \frac{1}{n} \geq y - \alpha = x \Rightarrow x \leq \frac{m-1}{n} < y$.

Teorema 1.1.7 Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci $x = \sup\{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}$, respectiv $x = \inf\{r \in \mathbb{Q} \mid r > x\}$.

DEMONSTRAȚIE: Fie $A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\} \neq \emptyset$, deoarece $x - 1 \in A$. A fiind o mulțime nevidă și majorată de numere reale, rezultă că există $\sup A \in A$; $\sup A < x \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\sup A < r < x$. Cum $r \in A \Rightarrow \sup A < r$ și $\sup A \in A$, ceea ce este fals, așadar $\sup A = x$.

Teorema 1.1.8 Fie $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ fixat. Dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ avem $a < \varepsilon$, atunci $a = 0$.

DEMONSTRAȚIE: Dacă $a \neq 0$, atunci $a > 0$ și, din proprietatea lui Arhimede, rezultă că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $na \geq 1$. Dacă în enunț luăm $\varepsilon = \frac{1}{n}$, avem $a < \frac{1}{n}$, de unde $na < 1$ și astfel obținem o contradicție. Deci $a = 0$.

Teorema 1.1.9 (lema intervalelor închise incluse) Fie $I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ un șir descendent de intervale închise și mărginite în \mathbb{R} , $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geq 0$. Atunci intersecția $\cap_{n \geq 0} I_n$ este tot un interval. Dacă, în plus, $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, atunci intersecția $\cap_{n \geq 0} I_n$ este alcătuită dintr-un punct.

DEMONSTRAȚIE: Considerăm $A = \{a_n \mid n \geq 0\}$ și $B = \{b_n \mid n \geq 0\}$,

$$a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots < b_n < \cdots < b_2 < b_1 < b_0.$$

Mulțimea A este majorată de b_0 , iar mulțimea B este minorată de a_0 . Fie $a = \sup A$ și $b = \inf B$. Deoarece $a_n \leq b_m$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ avem

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n, \quad \forall n \geq 0, \quad (1.5)$$

deci $[a, b] \subset I_n$, $\forall n \geq 0$, de unde $[a, b] \subset \bigcap_{n \geq 0} I_n$.

Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, atunci din (1.5) obținem inegalitățile

$$0 \leq b - a \leq b_n - a_n \Rightarrow a = b,$$

așadar $\bigcap_{n \geq 0} I_n = \{a\}$.

Lema 1.1.1 *Lema lui Cesaró (1859-1906)*

Orice șir mărginit de numere reale conține un subșir convergent.

DEMONSTRAȚIE: Fie (x_n) un șir mărginit de numere reale. Atunci există numerele reale $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ astfel încât $x_n \in [a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și considerăm $c = \frac{a+b}{2}$. Dintre intervalele $[a, c]$, respectiv $[c, b]$ îl alegem pe acela care conține o infinitate de termeni ai șirului x_n . Notăm intervalul ales cu $I_1 = [a_1, b_1]$.

$$a \leq a_1 < b_1 \leq b, \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$$

Fie $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Dintre intervalele $[a_1, c_1]$, respectiv $[c_1, b_1]$ îl alegem pe acela care conține o infinitate de termeni ai șirului x_n . Notăm acest interval cu $I_2 = [a_2, b_2]$.

$$a \leq a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1 \leq b, \quad b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}.$$

Folosind procedeul de mai sus construim inductiv un șir de intervale închise $I_n = [a_n, b_n]$ cu următoarele proprietăți: I_n conține o infinitate de termeni ai șirului x_n ,

$$a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0 = b$$

și $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Conform teoremei 1.1.9, rezultă $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\xi\}$.

Din construcția intervalelor I_n există un șir strict crescător de numere naturale $n_0 < n_1 < \cdots < n_p < \dots$ astfel încât $x_{n_p} \in I_p$, $p \in \mathbb{N}$. Deoarece x_{n_p} , $\xi \in I_p$ avem $|x_{n_p} - \xi| \leq \frac{b-a}{2^p}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, de unde rezultă că $x_{n_p} \rightarrow \xi$.

1.2 Mulțimi numărabile

Definiția 1.2.1 *Două mulțimi A și B se numesc echipotente dacă există o aplicație bijectivă $f : A \rightarrow B$. Dacă A și B sunt mulțimi echipotente, atunci vom nota $A \sim B$, iar relația " \sim " se numește relație de echipotență.*

Teorema 1.2.1 *Relația de echipotență este o relație de echivalență pe clasa mulțimilor.*

DEMONSTRAȚIE:

1. $A \sim A$, pentru orice mulțime A , deoarece aplicația identică $1_A : A \rightarrow A$ este o bijecție, deci " \sim " este reflexivă.
2. Dacă $A \sim B$, atunci există o aplicație bijectivă $f : A \rightarrow B$. Cum inversa ei $f^{-1} : B \rightarrow A$ este, de asemenea, bijectivă, avem $B \sim A$, deci " \sim " este simetrică.
3. Dacă $A \sim B$ și $B \sim C$, atunci există două aplicații bijective $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow C$. Aplicația $g \circ f : A \rightarrow C$ este, de asemenea, bijectivă și obținem $A \sim C$, adică " \sim " este tranzitivă.

Din 1, 2 și 3 deducem că relația de echipotență " \sim " este o relație de echivalență în clasa mulțimilor.

Definiția 1.2.2 1. O mulțime A se numește finită, dacă există un număr natural $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$ sau $A = \emptyset$, și infinită în caz contrar.

2. O mulțime A se numește numărabilă dacă $A \sim \mathbb{N}$ și nenumărabilă dacă este infinită și nu este numărabilă.
3. O mulțime A este cel mult numărabilă dacă A este finită sau numărabilă.

Observația 1.2.1 1. Două mulțimi finite sunt echipotente dacă și numai dacă au același număr de elemente.

2. Dacă mulțimea A este numărabilă și $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ este o bijecție, iar $f(n) \stackrel{\text{not}}{=} a_n$, $n \in \mathbb{N}$, atunci elementele mulțimii A formează un șir infinit de elemente diferite $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Așadar mulțimea A este numărabilă dacă și numai dacă toate elementele ei formează un șir a_1, \dots, a_n, \dots .
3. Orice submulțime infinită a unei mulțimi numărabile este numărabilă.
4. Orice submulțime a unei mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.

Exemplu 1.2.1 1. Mulțimea numerelor naturale \mathbb{N} este numărabilă.

2. Mulțimile numerelor pare respectiv impare sunt numărabile.

Corespondențele $n \rightarrow 2n$, respectiv $n \rightarrow 2n + 1$ sunt bijective.

Definiția 1.2.3 Pentru orice mulțime A se numește cardinalul lui A și se notează $|A|$, clasa de echivalență a lui A , adică familia tuturor mulțimilor echipotente cu A .

$|A| = \{B \mid A \sim B\}$, unde A, B aparțin clasei mulțimilor.

Observația 1.2.2 1. $|A| = |B| \Leftrightarrow A \sim B$.

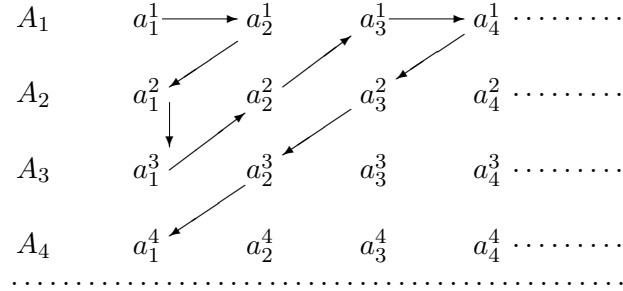
2. $|\emptyset| = 0$, iar $|\{1, 2, \dots, n\}| = n$.

3. Cardinalul mulțimii numerelor naturale se notează $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ (alef zero).

Teorema 1.2.2 Reuniunea numărabilă de mulțimi numărabile este o mulțime numărabilă.

DEMONSTRAȚIE: Fie A_n , $n \in \mathbb{N}$ un șir de mulțimi numărabile. Deoarece fiecare mulțime A_n , $n \in \mathbb{N}$ este numărabilă, rezultă că se pot numerota elementele ei sub forma $A_n = \{a_1^n, a_2^n, \dots, a_m^n, \dots\}$. Putem presupune că mulțimile sunt disjuncte două câte două; dacă un element apare în mai multe mulțimi îl menținem numai în prima mulțime în care apare, iar în restul mulțimilor îl înlăturăm.

Formăm următorul tabel, în care liniile sunt alcătuite din elementele mulțimilor A_n :



Luând elementele din tablou în ordinea indicată de săgeți, formăm șirul $a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_1^3, a_2^2, a_3^1, a_4^1, a_3^2, a_2^3, a_1^4, \dots$. Oricare ar fi un element a_m^n al unei mulțimi A_n , $m \in \mathbb{N}$, el aparține acestui șir. Prin urmare, șirul de mai sus conține toate elementele reuniunii $\bigcup_{n \geq 1} A_n$, deci $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ este numărabilă.

Teorema 1.2.3 *Produsul cartezian al unui număr finit de mulțimi numărabile este, de asemenea, numărabil.*

DEMONSTRAȚIE: Este suficient de arătat că produsul cartezian a două mulțimi numărabile A_1 și A_2 este numărabil. Cum A_1 este mulțime numărabilă, putem numerota elementele ei de forma $A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$. Atunci $A_1 \times A_2 = \bigcup_{n \geq 1} \{a_n\} \times A_2$. Mulțimea $\{a_n\} \times A_2$ este echipotentă cu A_2 , prin urmare, este numărabilă. Astfel, produsul $A_1 \times A_2$ este o mulțime numărabilă de mulțimi numărabile și, conform teoremei 1.2.2, el este numărabil.

Teorema 1.2.4 *Mulțimile \mathbb{Z} și \mathbb{Q} sunt numărabile.*

DEMONSTRAȚIE: Cum aplicația $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definită prin

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -\frac{n+1}{2}, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$$

este o bijecție, rezultă că mulțimea numerelor întregi este numărabilă.

$\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^*$ deoarece, dacă considerăm aplicația $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ $g(n) = n+1, n \in \mathbb{N}$, ea este o bijecție. Așadar, \mathbb{N}^* este și ea numărabilă. Conform teoremei 1.2.3 mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ este numărabilă.

Aplicația $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ definită prin $h(p, q) = \frac{p}{q}$ fiind o bijecție, rezultă $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \sim \mathbb{Q}$ și, deoarece $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, rezultă $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$, adică mulțimea numerelor raționale este numărabilă.

Teorema 1.2.5 *Mulțimea numerelor reale \mathbb{R} nu este numărabilă.*

DEMONSTRAȚIE: Presupunem prin absurd că mulțimea numerelor reale ar fi numărabilă, adică ar exista o bijecție $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(n) = a_n, n \in \mathbb{N}$. Scriem elementele a_n ca fracții zecimale $a_n = x_n, x_{n1}x_{n2} \dots x_{nm} \dots, n \in \mathbb{N}$, unde $(x_{ij})_{i,j \geq 1} \subseteq \{0, 1, 2, \dots, 9\}, x_n \in \mathbb{Z}$.

Considerăm elementul $b = 0, b_1b_2b_3 \dots$, unde $b_1 \neq x_{11}, b_2 \neq x_{22}, b_3 \neq x_{33}$ etc. Cum $b \in \mathbb{R}$, există $p \geq 0$ astfel încât $b = x_p$, adică $0, b_1b_2b_3 \dots = x_p, x_{p1}x_{p2} \dots x_{pn} \dots \Rightarrow b_p = x_{pp}$, ceea ce contravine alegerii cifrelor b_p . Așadar, mulțimea numerelor reale \mathbb{R} nu este numărabilă.

Corolarul 1.2.1 *Mulțimea numerelor iraționale $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ nu este numărabilă.*

DEMONSTRAȚIE: Presupunem că $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ este numărabilă. Deoarece $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ și \mathbb{Q} este numărabilă, conform teoremei 1.2.2 ar rezulta că \mathbb{R} este numărabilă, ceea ce este fals.

Corolarul 1.2.2 *Orice interval deschis (α, β) , unde $\alpha < \beta$ este mulțime nenumărabilă.*

Capitolul 2

Spații metrice

2.1 Spații metrice

Spațiile metrice formează o clasă importantă de spații topologice. Datorăm această noțiune matematicianului M. Fréchet (1878-1973) care, introducând noțiunea de distanță între obiecte matematice de același tip, ne permite să vorbim de distanța nu numai între două puncte din plan.

Definiția 2.1.1 Fie X o mulțime nevidă. O funcție $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

$$(D1) \quad d(x, x) = 0, \quad \forall x \in X;$$

$$(D2) \quad d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X \text{ (simetrie);}$$

$$(D3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall x, y, z \in X \text{ (inegalitatea triunghiului);}$$

se numește *semimetrică (sau semidistanță)*. Dacă, în plus, d verifică și

$$(D4) \quad d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y, \quad \forall x, y \in X,$$

atunci d se numește *metrică (sau distanță)*.

Observația 2.1.1 1. Dacă în $(D3)$ punem $x = y$ obținem:

$$d(x, x) \leq d(x, z) + d(z, x), \quad \forall x, z \in X, \text{ de unde } d(x, z) \geq 0, \quad \forall x, z \in X.$$

2. Putem reduce numărul de axiome care caracterizează noțiunea de semimetrică. Astfel $(D2)$ și $(D3)$ sunt echivalente cu $(D2')$

$$(D2') : \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in X, \text{ deci } (D1) + (D2) + (D3) \Leftrightarrow (D1) + (D2').$$

Evident $(D2) + (D3) \Rightarrow (D2')$. Reciproc, luăm în $(D2')$ $z = x$ și obținem

$$d(x, y) \leq d(x, x) + d(y, x) \Rightarrow d(x, y) \leq d(y, x)$$

Dacă inversăm pe x cu y avem $d(y, x) \leq d(x, y)$, deci $d(x, y) = d(y, x)$, adică $(D2)$.

Definiția 2.1.2 O pereche (X, d) , unde $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ este o metrică (semimetrică) se numește *spațiu metric (semimetric)*. Elementele unui spațiu metric se numesc puncte.

Observația 2.1.2 1. Dacă perechea (X, d) este un spațiu metric și $A \subset X$ este o submulțime nevidă a lui X , atunci perechea (A, d) este un spațiu metric.

2. Pe o mulțime nevidă X pot fi definite mai multe distanțe, după cum vom constata mai jos, deci mai multe structuri de spațiu metric. Atunci, când nu este pericol de confuzie, spațiul metric (X, d) va fi notat cu X .

În continuare vom da câteva exemple de spații metrice.

1. (\mathbb{R}, d) este un spațiu metric, unde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $d(x, y) = |x - y|$, $\forall x, y \in X$ este metrica euclidiană.

2. (\mathbb{C}, d) este spațiu metric relativ la metrica euclidiană $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

3. (\mathbb{R}^n, d) este spațiu metric, unde metrica euclidiană $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se definește astfel: $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}.$$

Verificarea proprietăților (D1), (D2) și (D4) este imediată.

Pentru a verifica (D3) fie $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ și $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$(D3) \Leftrightarrow \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2} \leq \left[\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 \right]^{1/2} + \left[\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \right]^{1/2} \quad (2.1)$$

Notăm $x_i - z_i = a_i$ și $z_i - y_i = b_i$, $i = \overline{1, n}$. Atunci relația (2.1) devine

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right]^{1/2} \leq \left[\sum_{i=1}^n a_i^2 \right]^{1/2} + \left[\sum_{i=1}^n b_i^2 \right]^{1/2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2 \left[\sum_{i=1}^n a_i^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{i=1}^n b_i^2 \right]^{1/2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left[\sum_{i=1}^n a_i^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{i=1}^n b_i^2 \right]^{1/2} \Leftrightarrow \left[\sum_{i=1}^n a_i b_i \right]^2 \leq \left[\sum_{i=1}^n a_i^2 \right] \left[\sum_{i=1}^n b_i^2 \right], \end{aligned}$$

care nu este altceva decât inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz.

Observăm că spațiile metrice (\mathbb{R}^2, d) și (\mathbb{C}, d) cu distanțele euclidiene sunt identice.

4. (\mathbb{R}^n, d) este un spațiu metric, unde $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

este metrica Manhattan (distanța "poștașului").

5. (\mathbb{R}^n, d) este un spațiu metric relativ la distanța $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$d(x, y) = \max_{i=\overline{1, n}} |x_i - y_i|, \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

6. Fie $A \in \mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{R})$. Orice matrice din $\mathcal{M}_{m, n}(\mathbb{R})$ poate fi identificată cu un vector din $\mathbb{R}^{m \cdot n}$.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \\ &= (a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \dots a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \dots a_{m1}a_{m2} \dots a_{mn}). \end{aligned}$$

Cum pe \mathbb{R}^{mn} am introdus deja 3 metrice, rezultă că putem defini distanța între două matrici folosind cele 3 metrice.

7. (\mathbb{R}^n, d) este un spațiu metric, unde $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right]^{1/p}, \quad \forall p \geq 1, p \in \mathbb{R}, \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ este metrica Minkowski (1864 - 1909).

Verificarea proprietăților (D1), (D2) și (D4) este imediată. Pentru a arăta că are loc și (D3) vom folosi următoarele inegalități.

Lema 2.1.1 Fie $a, b \in \mathbb{R}_+$ și $p, q > 1$ astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Atunci

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

DEMONSTRAȚIE: Funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{x^{-q}}{q}$$

este derivabilă și are un minim în punctul $x = 1$. Pentru $x = a^{\frac{1}{q}} b^{-\frac{1}{p}}$ avem

$$1 = f(1) \leq f\left(a^{\frac{1}{q}} b^{-\frac{1}{p}}\right) = \frac{1}{p} a^{\frac{p}{q}} b^{-1} + \frac{1}{q} a^{-1} b^{\frac{q}{p}}.$$

Cum $\frac{p}{q} = p - 1$ și $\frac{q}{p} = q - 1$, rezultă $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Lema 2.1.2 Fie $a_i, b_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, n}$ și $p, q > 1$ astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Atunci

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left[\sum_{i=1}^n a_i^p \right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^n b_i^q \right]^{1/q} \quad \text{inegalitatea lui Hölder (1859 - 1937)}.$$

DEMONSTRAȚIE: Presupunem că cel puțin un $a_i \neq 0$ respectiv, $b_i \neq 0$. Fie $a = \frac{a_i}{[\sum_{i=1}^n a_i^p]^{1/p}}$

și $b = \frac{b_i}{[\sum_{i=1}^n b_i^q]^{1/q}}$.

Folosind lema 2.1.1 pentru a și b obținem

$$\frac{a_i b_i}{[\sum_{i=1}^n a_i^p]^{1/p} [\sum_{i=1}^n b_i^q]^{1/q}} \leq \frac{a_i^p}{p \sum_{i=1}^n a_i^p} + \frac{b_i^q}{q \sum_{i=1}^n b_i^q}, \quad i = 1, n.$$

Însumând după i avem

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{[\sum_{i=1}^n a_i^p]^{1/p} [\sum_{i=1}^n b_i^q]^{1/q}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{p \sum_{i=1}^n a_i^p} + \frac{\sum_{i=1}^n b_i^q}{q \sum_{i=1}^n b_i^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

de unde

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left[\sum_{i=1}^n a_i^p \right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^n b_i^q \right]^{1/q}.$$

Lema 2.1.3 Fie $a_i, b_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, n}$ și $p \geq 1$. Atunci

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{i=1}^n a_i^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^n b_i^p \right]^{1/p} \quad \text{inegalitatea lui Minkowski.}$$

DEMONSTRAȚIE: Dacă $p = 1$ obținem chiar egalitate. Pentru $p > 1$ avem

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p &= \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{p-1} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{p-1} a_i + \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{p-1} b_i \leq \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^n a_i^p \right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^n ((a_i + b_i)^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}} + \\ &+ \left[\sum_{i=1}^n b_i^p \right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^n ((a_i + b_i)^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}} = \\ &= \left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\left[\sum_{i=1}^n a_i^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^n b_i^p \right]^{1/p} \right], \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{i=1}^n a_i^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^n b_i^p \right]^{1/p}.$$

Fie $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ și $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$(D3) \Leftrightarrow \left[\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{i=1}^n |x_i - z_i|^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^n |z_i - y_i|^p \right]^{1/p} \quad (2.2)$$

Notăm $a_i = x_i - z_i$ și $b_i = z_i - y_i$, $i = \overline{1, n}$. Cu notațiile făcute 2.2 devine

$$\left[\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right]^{1/p},$$

ceea ce este adevărat folosind inegalitatea lui Minkowski.

Observația 2.1.3 Dacă nu va fi precizat vom subînțelege pe \mathbb{R}^n distanța euclidiană.

8. Pentru orice mulțime nevidă X , (X, d) este spațiu metric, unde $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$
 $d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = y \\ 1, & \text{dacă } x \neq y \end{cases}, \quad \forall x, y \in X$, este metrica discretă. Un astfel de spațiu metric se numește spațiu metric discret.

9. Hiper cubul de dimensiune n .

Fie $B = \{0, 1\}$ codul binar. Mulțimea $B^n = B \times B \times \dots \times B$ se numește hiper cub de dimensiune n . Orice n -uplu $x \in B^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$ reprezintă un cuvânt de cod de lungime n . Definim adunarea modulo 2 în B și o extindem la elementele din B^n . Astfel $\forall x, y \in B^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $x \oplus y = (x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, \dots, x_n \oplus y_n)$. Pentru $\forall x, y \in B^n$ se definește $d(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \oplus y_i$, adică numărul de componente ale lui x și y care nu coincid.

Se verifică ușor că (B^n, d) este un spațiu metric d , unde d se numește distanța Hamming (1915 - 1998).

Hipercubul de dimensiune 2 este pătratul având latura de lungime 1 și ca vârfuri cuvintele de cod 00, 01, 10, 11. Hipercubul de dimensiune 3 este cubul obișnuit de latură având lungimea 1, iar ca vârfuri cuvintele de cod 000, 001, 010, 100, 011, 101, 110 și 111.

Mulțimea B^n are o interpretare remarcabilă și anume $B^n \simeq A_n$, unde A_n este mulțimea de numere naturale $\{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$. Orice număr $x \in A_n$ are o reprezentare unică de forma $x = \sum_{i=1}^n a_i 2^{i-1}$ cu $a_i \in B$ și poate fi astfel identificat cu punctul $a_1 a_2 \dots a_n \in B^n$.

10. Proiecția stereografică.

Fie o sferă în \mathbb{R}^3 cu centrul în $O(0, 0, 0)$ și N extremitatea cealaltă a diametrului ce trece prin O . Orice punct z din planul complex xOy va fi proiectat într-un punct P de pe sferă prin intersecția sferei cu dreapta Nz . Astfel fiecărui punct din plan îi corespunde un punct de pe sferă și, reciproc, fiecărui punct de pe sferă îi corespunde un punct din plan. Această corespondență este o corespondență homeomorfă.

Definim o metrică pe \mathbb{C} (altă decât metrica în plan) numită metrica sferică în \mathbb{C} astfel:

$$\delta : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\delta(z, z') = d(P, P') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |z'|^2}},$$

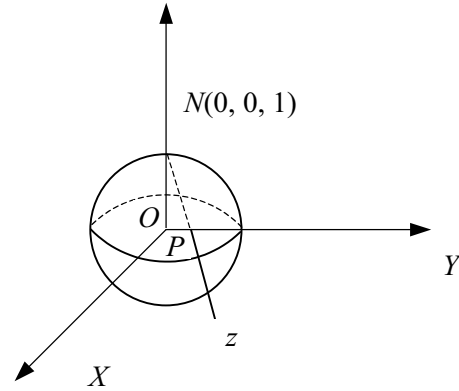


Figura 2.1:

unde d este metrica euclidiană în \mathbb{R}^3 .

Această operație, prin care punctele din plan se pun în corespondență cu punctele sferei, se numește proiecție stereografică prin polul N , iar sfera se numește sfera lui Riemann (1826 - 1866).

Dacă $z \in \mathbb{C}$ se îndepărtează de originea O ($|z| \rightarrow \infty$), atunci punctul P se apropie de sferă de punctul N și vom identifica elementul de la infinit cu N de pe sferă. În acest fel în planul complex vom vorbi de un singur punct la infinit.

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se numește planul complex compactificat.

Punctul P are coordonatele

$$P \left(\xi = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \eta = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$

Invers, orice punct $P \neq N$ al sferei va determina un singur punct $z \in \mathbb{C}$ prin intersecția dreptei NP cu planul $\xi = 0$. Dacă P are coordonatele $P(\xi, \eta, \zeta)$, atunci $z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}$.

11. Fie A o mulțime nevidă, $A \subset \mathbb{R}^n$.

$(\mathcal{M}(A), d)$ este spațiu metric, unde $\mathcal{M}(A)$ este mulțimea funcțiilor numerice, reale, mărginite definite pe A , iar $d : \mathcal{M}(A) \times \mathcal{M}(A) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $d(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$, $\forall f, g \in \mathcal{M}(A)$ este distanța uniformă.

Verificarea condițiilor (D1), (D2) și (D4) este imediată. Arătăm că are loc și condiția (D3). Avem inegalitățile evidente $\forall f, g, h \in \mathcal{M}(A)$, $\forall x \in A$

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leq \sup_{x \in A} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in A} |h(x) - g(x)|.$$

Atunci

$$\sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| \leq \sup_{x \in A} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in A} |h(x) - g(x)|,$$

adică $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$, $\forall f, g, h \in \mathcal{M}(A)$.

12. $(C^k([a, b]), d)$ este spațiul metric, unde $C^k([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f, f', f'', \dots, f^{(k)} \text{ sunt continue pe } [a, b], k \in \mathbb{N}\}$, iar $d : C^k([a, b]) \times C^k([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ este definită prin

$$d(f, g) = \sum_{i=0}^k \max_{x \in [a, b]} |f^{(i)}(x) - g^{(i)}(x)| \quad \text{metrica Cebâșev (1821 - 1894).}$$

2.2 Spații vectoriale

Definiția 2.2.1 Fie V o mulțime nevidă și $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ. Spunem că pe V s-a definit o structură de spațiu vectorial (sau spațiu liniar) peste corpul K , dacă s-au definit o lege de compoziție internă pe V , notată cu \oplus ,

$$\begin{aligned} V \times V &\rightarrow V \\ (v, w) &\rightarrow v \oplus w \end{aligned}$$

și o lege de compoziție externă, notată cu \odot ,

$$\begin{aligned} K \times V &\rightarrow V \\ (\alpha, v) &\rightarrow \alpha \odot v, \end{aligned}$$

care verifică următoarele axiome:

- (V1) (V, \oplus) este grup abelian;
- (V2) $(\alpha + \beta) \odot v = \alpha \odot v \oplus \beta \odot v, \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall v \in V;$
- (V3) $\alpha \odot (v \oplus w) = \alpha \odot v \oplus \alpha \odot w, \quad \alpha \in K, \forall v, w \in V;$
- (V4) $\alpha \odot (\beta \odot v) = (\alpha\beta) \odot v, \quad \alpha, \beta \in K, \forall v \in V;$
- (V5) Dacă 1 este elementul unitate al corpului K , atunci $1 \odot v = v, \forall v \in V.$

(V, K, \oplus, \odot) se numește spațiu vectorial (liniar) peste corpul K sau K spațiu vectorial. Elementele lui V se numesc vectori, iar elementele lui K se numesc scalari. Dacă $K = \mathbb{R}$, respectiv \mathbb{C} , atunci (V, K, \oplus, \odot) este un spațiu vectorial real, respectiv complex.

Exemplu 2.2.1 1. Dacă fixăm un corp $(K, +, \cdot)$, atunci pe acest corp avem o structură de K spațiu vectorial.

2. Dacă $V = \mathbb{R}^n$, $K = \mathbb{R}$ și pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ $\alpha \in \mathbb{R}$, definim cele două operații

$$\begin{aligned} x \oplus y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \alpha \odot x &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n), \end{aligned}$$

atunci \mathbb{R}^n este un spațiu vectorial real n dimensional.

3. Dacă $V = C^0([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continuă}\}$, $K = \mathbb{R}$ și $\forall f, g \in C^0([a, b])$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ și $\forall x \in [a, b]$ definim cele două operații:

$$\begin{aligned} (f \oplus g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (\alpha \odot f)(x) &= \alpha f(x), \end{aligned}$$

atunci $(C^0([a, b]), \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ devine spațiu vectorial real.

4. $(C^k([a, b]), K, \oplus, \odot)$ este spațiu vectorial real, unde \oplus și \odot sunt operațiile definite la exemplul 3.

Convenim ca atunci, când nu se produce confuzie, operația internă să fie notată cu $+$, iar cea externă \cdot și K -spațiul vectorial $(V, K, +, \cdot)$ să-l notăm cu V sau V/K .

Definiția 2.2.2 Fie V un K spațiu vectorial real sau complex. O aplicație $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ ce verifică proprietățile:

$$(N1) \quad q(v) \geq 0, \quad \forall v \in V \text{ și } q(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0_V;$$

$$(N2') \quad q(v) = q(-v), \quad \forall v \in V;$$

(N3) $q(v_1 + v_2) \leq q(v_1) + q(v_2)$, $\forall v_1, v_2 \in V$ (proprietatea de subaditivitate), se numește *cvasinormă*.

Dacă întărim condiția (N2') prin condiția:

$$(N2) \quad q(\alpha v) = |\alpha|q(v), \quad \forall v \in V, \text{ atunci cvasinorma se numește normă.}$$

Observația 2.2.1 1. $\forall v_1, v_2, \dots, v_n \in V \quad q(\sum_{i=1}^n v_i) \leq \sum_{i=1}^n q(v_i)$.

$$2. \quad \forall v_1, v_2 \in V \quad |q(v_1) - q(v_2)| \leq q(v_1 - v_2).$$

3. Vom nota, în mod curent, norma prin $\|\cdot\|$.

Exemplu 2.2.2 Fie $V = \mathbb{R}^n$ și $K = \mathbb{R}$. Pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se definesc

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{1/2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1, n} |x_i|.$$

Considerăm un spațiu vectorial real V și o metrică $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci (V, d) va fi spațiu metric. Fie funcția $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$q(v) = d(v, 0_V) \tag{2.3}$$

și presupunem, că distanța d este invariantă la translații, adică

$$d(v_1 + v, v_2 + v) = d(v_1, v_2), \quad \forall v, v_1, v_2 \in V.$$

Deoarece $d(v, 0_V) \geq 0$ avem $q(v) \geq 0$, $\forall v \in V$; $q(v) = 0 \Leftrightarrow d(v, 0_V) = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$ din (D1) și (D4) definiția 2.1.1, deci q verifică (N1).

$\forall v \in V \quad q(v) = d(v, 0_V) = d(v - v, 0_V - v) = d(0_V, -v) = d(-v, 0_V) = q(-v)$, adică are loc (N2').

$\forall v_1, v_2 \in V \quad q(v_1 + v_2) = d(v_1 + v_2, 0_V) = d(v_1, -v_2) \leq d(v_1, 0_V) + d(0_V, -v_2) = q(v_1) + q(v_2)$, deci q verifică și (N3).

Observăm că, pornind cu o metrică invariantă la translații, ajungem la o cvasinormă. Are loc și reciproca, adică o cvasinormă determină o metrică invariantă la translații.

Fie $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ o cvasinormă pe spațiul vectorial real V și definim funcția $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

$$d(v_1, v_2) = q(v_1 - v_2) \tag{2.4}$$

Atunci

$$\begin{aligned} \forall v \in V \quad & d(v, v) = q(v - v) = q(0_V) = 0 \Rightarrow (D1); \\ \forall v_1, v_2 \in V \quad & d(v_1, v_2) = q(v_1 - v_2) = q(v_2 - v_1) = d(v_2, v_1) \Rightarrow (D2); \\ \forall v_1, v_2, v_3 \in V \quad & d(v_1, v_2) = q(v_1 - v_2) = q(v_1 - v_3 + v_3 - v_2) \leq \\ & \leq q(v_1 - v_3) + q(v_3 - v_2) = d(v_1, v_3) + d(v_3, v_2) \Rightarrow (D3). \end{aligned}$$

Dacă $v_1, v_2 \in V$ $d(v_1, v_2) = 0 \Rightarrow q(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0_V \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow (D4)$;
 $\forall v_1, v_2, v \in V$ $d(v_1 + v, v_2 + v) = q(v_1 + v - v_2 - v) = q(v_1 - v_2) = d(v_1, v_2)$, adică d definită prin (2.4) este o metrică invariantă la translații pe V . Deci metricile invariante la translații sunt generate de cvasinorme.

Dacă în (2.3) considerăm că d este o metrică compatibilă cu înmulțirea cu scalarii, adică $\forall \alpha \in K, \forall v_1, v_2 \in V$ $d(\alpha v_1, \alpha v_2) = |\alpha|d(v_1, v_2)$, atunci q definit de (2.3) este o normă. Într-adevăr, $q(\alpha v) = d(\alpha v, 0_V) = |\alpha|d(v, 0_V) = |\alpha|q(v)$, prin urmare are loc (N2).

Dacă q este o normă, atunci metrica d definită de (2.4) este compatibilă cu înmulțirea cu scalarii. Într-adevăr, pentru orice $v_1, v_2 \in V, \forall \alpha \in K$ avem

$$d(\alpha v_1, \alpha v_2) = q(\alpha v_1 - \alpha v_2) = q(\alpha(v_1 - v_2)) = |\alpha|q(v_1 - v_2) = |\alpha|d(v_1, v_2).$$

Astfel avem o corespondență biunivocă între metricile invariante la translații și compatibile cu înmulțirea cu scalarii și norme. Metricile care au fost introduse la exemplele de la spații metrice sunt induse de norme (distanța sferică nu este indusă de nici o normă) și, la rândul lor, induc norme.

Definiția 2.2.3 *Un K spațiu vectorial pe care s-a definit o normă se numește spațiu vectorial normat.*

Definiția 2.2.4 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spațiu vectorial, unde $K = \mathbb{R}$ sau \mathbb{C} . O funcție $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow K$ se numește produs scalar dacă sunt satisfăcute următoarele proprietăți*

- P1 $(x, x) \geq 0, \forall x \in V$ și $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
- P2 $(x, y) = \overline{(y, x)}, \forall x, y \in V$;
- P3 $(x + y, z) = (x, z) + (y, z), \forall x, y, z \in V$;
- P4 $(\alpha x, y) = \alpha(x, y), \forall \alpha \in K, \forall x, y \in V$.

Exemplu 2.2.3 *În spațiul vectorial real \mathbb{R}^n funcția*

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

este un produs scalar pe \mathbb{R}^n .

Definiția 2.2.5 *Un spațiu vectorial pe care s-a definit un produs scalar se numește spațiu prehilbertian.*

Teorema 2.2.1 *Inegalitatea Cauchy - Buniakovski - Schwarz.*

Dacă $(V, K, +, \cdot)$ este un spațiu prehilbertian înzestrat cu un produs scalar (\cdot, \cdot) , atunci

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}, \quad \forall x, y \in V.$$

DEMONSTRAȚIE. Fie $x, y \in V$ și $\alpha \in \mathbb{C}$. Avem

$$0 \leq (\alpha x + y, \alpha x + y) = |\alpha|^2(x, x) + \alpha(x, y) + \overline{\alpha(x, y)} + (y, y) \quad (2.5)$$

Dacă $(x, y) = 0$, atunci relația din enunț are loc. Dacă $(x, y) \neq 0$, atunci în (2.5) fie $\alpha = \frac{\overline{(x, y)}}{|(x, y)|}t, t \in \mathbb{R}$. Avem $t^2(x, x) + 2t|(x, y)| + (y, y) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y), \forall x, y \in V$.

Teorema 2.2.2 *Orice spațiu prehilbertian este un spațiu normat.*

DEMONSTRAȚIE: Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spațiu prehilbertian înzestrat cu un produs scalar $(\cdot, \cdot) : V \rightarrow K$ și definim funcția $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Arătăm că funcția $\| \cdot \|$ este o normă. Avem

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{(x, x)} = 0 \Leftrightarrow (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta \\ \|\alpha x\| &= \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} (x, x)} = \sqrt{|\alpha|^2 (x, x)} = |\alpha| \sqrt{(x, x)} = |\alpha| \|x\| \\ \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x, y) + \overline{(x, y)} = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} (x, y) \leq \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x, y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

adică $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

2.3 Topologia indusă de o metrică

Definiția 2.3.1 *Fie X un spațiu metric, $x \in X$ un punct fixat și $r > 0$ un număr real pozitiv. Mulțimea $S(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ se numește sferoid deschis centrat în x de rază r .*

Exemplu 2.3.1 1. Fie $X = \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ și $r > 0$.

$$S(x, r) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < r\} = (x - r, x + r).$$

Așadar, sferoizii deschisi din \mathbb{R} sunt intervalele deschise din \mathbb{R} .

2. Fie $X = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ și $r > 0$.

$$S(x, r) = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid (y_i - x_i)^2 < r^2\}.$$

Pentru $n = 2$ sferoizii din \mathbb{R}^2 reprezintă discurile din \mathbb{R}^2 , iar pentru $n = 3$ sferoizii din \mathbb{R}^3 sunt sferele pline din \mathbb{R}^3 .

3. Fie $X = C^0([a, b])$, $f \in C^0([a, b])$ și $r > 0$.

$$S(f, r) = \{g \in C^0([a, b]) \mid d(f, g) < r\} = \{g \in C^0([a, b]) \mid \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| < r\}.$$

$$g \in S(f, r) \Rightarrow |f(x) - g(x)| < r, \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow f(x) - r < g(x) < f(x) + r, \quad x \in A,$$

așadar $S(f, r)$ este mulțimea funcțiilor g ce au graficul situat între graficele funcțiilor $f - r, f + r$.

Fie X un spațiu metric.

Definiția 2.3.2 *Se numește vecinătate a punctului $x \in X$ orice mulțime $V \subset X$ pentru care există un sferoid deschis centrat în x , adică $\exists S(x, r) \subset V$, $r > 0, r \in \mathbb{R}$.*

Pentru orice $x \in X$ notăm $\mathcal{V}_x = \{V \subset X \mid V \text{ vecinătate a punctului } x \in X\}$.

Observația 2.3.1 *Orice sferoid cu centrul în x este o vecinătate a lui x .*

Teorema 2.3.1 *Proprietățile vecinătăților unui punct, într-un spațiu metric X .*

1. $\forall V \in \mathcal{V}_x$ avem $x \in V$;
2. Dacă $V \in \mathcal{V}_x$ și $V \subset U$, atunci $U \in \mathcal{V}_x$;
3. Dacă $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x$, atunci $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$;
4. Dacă $V \in \mathcal{V}_x$, atunci $\exists U \in \mathcal{V}_x$, $U \subset V$ astfel încât $\forall y \in U$, $V \in \mathcal{V}_y$;
5. Dacă $x \neq y$, $x, y \in X$, atunci $\exists V \in \mathcal{V}_x$ și $V \in \mathcal{V}_y$ astfel încât $V \cap U = \emptyset$ (proprietatea Hausdorff).

DEMONSTRAȚIE: 1. evident.

2. Dacă $V \in \mathcal{V}_x$, atunci $\exists r > 0$ astfel încât $S(x, r) \subset V$. Cum $V \subset U$ rezultă că $\exists r > 0$ astfel încât $S(x, r) \subset U$, de unde $U \in \mathcal{V}_x$.

3. Din $V_i \in \mathcal{V}_x$, $i = \overline{1, 2}$ rezultă că există $r_i > 0$ astfel încât $S(x, r_i) \subset V_i$, $\forall i = \overline{1, 2}$. Alegând $r = \min(r_1, r_2) > 0$, avem $S(x, r) \subset V_1 \cap V_2$ și, deci, $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$.

4. Cum $V \in \mathcal{V}_x$, rezultă că există $r > 0$ astfel încât $S(x, r) \subset V$. Dacă luăm $U = S(x, r) \in \mathcal{V}_x$, atunci aceasta satisface cerința.

5. Întrucât $x \neq y$, rezultă $d(x, y) > 0$. Fie $r = \frac{1}{3}d(x, y) > 0$ și $V = S(x, r) \in \mathcal{V}_x$, $U = S(y, r) \in \mathcal{V}_y$. Presupunem că $V \cap U \neq \emptyset$, adică $\exists z \in V \cap U$. Din $z \in V \cap U \Rightarrow d(x, z) < r$ și $d(y, z) < r$. Însă

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2r = \frac{2}{3}d(x, y) \Rightarrow \frac{1}{3}d(x, y) < 0,$$

ceea ce contravine faptului că $d(x, y) > 0$. Astfel, presupunerea făcută este falsă, prin urmare, $V \cap U = \emptyset$.

Definiția 2.3.3 *Fie X un spațiu metric. Submulțimea $D \subset X$ se numește deschisă sau un deschis al spațiului X dacă $D \in \mathcal{V}_x$, $\forall x \in D$, adică o dată cu orice punct al ei conține un sferoid centrat în acel punct.*

Teorema 2.3.2 *Fie X un spațiu metric, $a \in X$ și $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$. Atunci $S(a, r)$ este o mulțime deschisă.*

DEMONSTRAȚIE: Fie $b \in S(a, r)$, $d(a, b) < r$ și notăm $r_1 = r - d(a, b) > 0$. Pentru ca $S(a, r)$ să fie o mulțime deschisă e suficient să arătăm că $S(b, r_1) \subset S(a, r)$.

$x \in S(b, r_1) \Rightarrow d(x, b) < r_1 = r - d(a, b) \Rightarrow d(x, b) + d(a, b) < r$; $d(x, a) \leq d(x, b) + d(a, b) \Rightarrow d(x, a) < r$, adică $x \in S(a, r)$.

Definiția 2.3.4 *Fie X un spațiu metric. O submulțime $F \subset X$ se numește închisă sau un închis al spațiului X , dacă $X - F = C_X F$ este deschisă.*

Exemplu 2.3.2 1. \emptyset și X sunt în același timp mulțimi deschise și închise.

2. Pentru $X = \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ intervalele (a, b) , (a, ∞) , $(-\infty, a)$ sunt mulțimi deschise, intervalele $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$ sunt mulțimi închise, dar intervalele $[a, b)$, $(a, b]$ nu sunt nici închise, nici deschise. Mulțimea $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ este închisă, dar mulțimea $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ nu este nici închisă, nici deschisă.

3. Pentru $X = \mathbb{R}^2$ mulțimile $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r^2\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > r^2\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 < x^2 + y^2 < R^2\}$, unde $r, R \in \mathbb{R}$, $r, R > 0$, sunt mulțimi deschise, în timp ce mulțimile $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq r^2\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 \leq x^2 + y^2 < R^2\}$ sunt mulțimi închise.

Mulțimea formată dintr-un singur punct în \mathbb{R}^2 este închisă ca și mulțimea $[a, b] \times [c, d]$.

4. Fie Y un spațiu metric și $X \subset Y$ spațiul metric cu distanța indusă. O submulțime $A \subset X$ este deschisă în $X \Leftrightarrow \exists D \subset Y$ deschisă astfel încât $A = D \cap X$.

Definiția 2.3.5 Dacă X este o mulțime și \mathcal{T} o familie de submulțimi ale lui X , $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ ce verifică proprietățile:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
2. Orice reuniune de mulțimi din \mathcal{T} aparține lui \mathcal{T} , adică $\forall A_i \in \mathcal{T}, i \in I$ avem $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$;
3. Orice intersecție finită de mulțimi din \mathcal{T} aparține lui \mathcal{T} , adică $\forall A_i \in \mathcal{T}, i \in I$ cu I finită avem $\cap_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$,

atunci spunem că pe X este definită o topologie \mathcal{T} , iar perechea (X, \mathcal{T}) se numește spațiu topologic.

Teorema 2.3.3 Fie X un spațiu metric și $\mathcal{T} = \{D \subset X \mid D \text{ mulțime deschisă}\}$ mulțimea deschisurilor din X . Atunci (X, \mathcal{T}) este un spațiu topologic.

DEMONSTRAȚIE: 1. evident.

2. Fie $D_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$ mulțimi deschise și notăm $D = \cup_{i \in I} D_i$. Dacă $a \in D$, atunci $\exists i_0 \in I$ astfel încât $a \in D_{i_0}$ și, cum D_{i_0} este deschisă, $\exists S(a, r) \subset D_{i_0} \subset D$, așadar D este deschisă.

3. Fie $D = \cap_{i \in I} D_i$ unde $D_i \in \mathcal{T}$ sunt mulțimi deschise, $i \in I$, I finită. Dacă $a \in D$, atunci $a \in D_i$, $\forall i \in I$. Cum D_i sunt mulțimi deschise, rezultă că $\exists S(a, r_i) \subset D_i$, $\forall i \in I$. Luând $r = \min_{i \in I} r_i > 0$ avem $S(a, r) \subset D_i$, $\forall i \in I$, deci $S(a, r) \subset D$, adică D este mulțime deschisă.

Observația 2.3.2 Din teorema 2.3.3 rezultă că orice spațiu metric este în mod natural un spațiu topologic.

Teorema 2.3.4 Fie X un spațiu metric și $\mathcal{F} = \{F \subset X \mid F \text{ mulțime închisă}\}$ mulțimea închisurilor din X . Atunci (X, \mathcal{CF}) este un spațiu topologic.

DEMONSTRAȚIE. Cum $F \subset X$ este mulțime închisă $\Leftrightarrow C_x F$ este deschisă și folosind formula lui de Morgan (1806 - 1871) și teorema 2.3.3 rezultă cerința teoremei.

Observația 2.3.3 1. Intersecția unei familii infinite de mulțimi deschise nu este întotdeauna deschisă. Dacă considerăm mulțimile $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$ ele sunt deschise, dar intersecția lor $A = \cap_{n \geq 1} A_n = \{0\}$ nu este deschisă.

2. Reuniunea unei familii infinite de mulțimi închise nu este întotdeauna închisă. Dacă considerăm mulțimile $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $n \geq 1$ ele sunt mulțimi închise, dar reuniunea lor $A = \cup_{n \geq 1} A_n = (0, 1]$ nu este închisă.

3. Orice mulțime finită este închisă, ea fiind reuniune finită de mulțimi formate dintr-un singur element, care sunt mulțimi închise, într-un spațiu metric.

Fie X un spațiu metric și $A \subset X$ o submulțime a lui X .

Definiția 2.3.6 Un punct $a \in A$ se numește punct interior lui A dacă există un sferoid centrat în a inclus în A , adică $\exists r \in \mathbb{R}, r > 0$ astfel încât $S(a, r) \subset A$. Mulțimea $\overset{\circ}{A} = \{a \in X \mid a \text{ este punct interior lui } A\}$ se numește interiorul lui A .

Definiția 2.3.7 Un punct $a \in X$ se numește punct aderent lui A dacă orice vecinătate a punctului a are puncte din A , adică $\forall V \in \mathcal{V}_a, V \cap A \neq \emptyset$. Mulțimea $\bar{A} = \{a \in X \mid a \text{ punct aderent lui } A\}$ se numește aderența sau închiderea lui A .

Definiția 2.3.8 Un punct $a \in X$ se numește punct exterior lui A dacă este punct interior mulțimii CA , adică $a \in \overset{\circ}{CA}$. Mulțimea punctelor exterioare lui A se numește exteriorul lui A și se notează $ExtA$.

Definiția 2.3.9 Un punct $a \in X$ se numește punct frontieră al mulțimii A dacă nu este nici punct interior nici punct exterior lui A . Mulțimea $\partial A = FrA = \{a \in X \mid a \text{ punct frontieră al lui } A\}$ se numește frontiera lui A .

Definiția 2.3.10 Un punct $a \in X$ se numește punct de acumulare al mulțimii A dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}_a$ a punctului a avem $(V \cap A) - \{a\} \neq \emptyset$. Mulțimea $A' = \{a \in X \mid a \text{ punct de acumulare al lui } A\}$ se numește mulțimea punctelor de acumulare sau mulțimea derivată a lui A .

Orice punct de acumulare al lui A este punct aderent al lui A , dar pot exista puncte aderente ale lui A care să nu fie puncte de acumulare.

Un punct aderent a al lui A , care nu aparține lui A , este în mod necesar punct de acumulare. Punctele lui A nu sunt în mod necesar puncte de acumulare.

De exemplu, dacă $A = \{a\}$, atunci $a \in \bar{A}$ dar a nu este punct de acumulare al lui A , deoarece A nu conține nici un alt punct diferit de a , deci nu verifică definiția punctului de acumulare.

Dacă o mulțime A dintr-un spațiu metric are un punct de acumulare, atunci ea este infinită. Prin urmare o mulțime finită nu are nici un punct de acumulare. Există și mulțimi infinite care nu au nici un punct de acumulare cum sunt \mathbb{N}, \mathbb{Z} .

Definiția 2.3.11 Un punct $a \in A$ se numește punct izolat al lui A dacă există o vecinătate a lui a ce are ca element comun cu A doar pe a , adică $\exists V \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $V \cap A = \{a\}$.

Observația 2.3.4 1. $\overset{\circ}{A} \subseteq A \subseteq \bar{A}$;
2. $A' \subseteq \bar{A}$ și $\bar{A} = A \cup A'$;
3. $FrA = \bar{A} \cap \bar{CA}$.

Exemplu 2.3.3 1. Fie $X = \mathbb{R}$ și $A = (0, 1)$. Avem $\overset{\circ}{A} = (0, 1)$, $\bar{A} = [0, 1]$, $FrA = \{0, 1\}$.

2. $X = \mathbb{R}$ și $A = \mathbb{N}$. Avem $\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \emptyset$, $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, $Fr\mathbb{N} = \mathbb{N}$.

3. $X = \mathbb{R}$ și $A = \mathbb{Q}$. Avem $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $Fr\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

4. $X = \mathbb{R}^2$ și $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, atunci $\overset{\circ}{A} = A$, $\bar{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $FrA = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

$$5. X = \mathbb{R}, A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}, \text{ atunci } A' = \{0\}, \overset{\circ}{A} = \emptyset, \bar{A} = A' \cup A = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}, FrA = \bar{A}.$$

Teorema 2.3.5 Pentru orice submulțime $A \subset X$, $\overset{\circ}{A}$ este cea mai mare mulțime deschisă inclusă în A , relativ la relația de incluziune.

DEMONSTRAȚIE. Pentru orice $a \in \overset{\circ}{A}$ notăm D_a mulțimea deschisă cu $a \in D_a \subset A$. Cum D_a este deschisă, rezultă că A este vecinătate pentru orice $y \in D_a$, prin urmare, $D_a \subset \overset{\circ}{A}$. Deoarece $\overset{\circ}{A} = \cup_{a \in A} D_a$ obținem $\overset{\circ}{A}$ mulțime deschisă.

Fie $D \subset A$ o mulțime deschisă. Dacă $a \in D \subset A$, atunci $a \in \overset{\circ}{A}$, deci $D \subset \overset{\circ}{A}$, adică $\overset{\circ}{A}$ este cea mai mare mulțime deschisă inclusă în A .

Corolarul 2.3.1 O mulțime $A \subset X$ este deschisă dacă și numai dacă $A = \overset{\circ}{A}$.

DEMONSTRAȚIE: Dacă A este o mulțime deschisă și, cum $\overset{\circ}{A}$ este cea mai mare mulțime deschisă inclusă în A , obținem $A = \overset{\circ}{A}$. Dacă $A = \overset{\circ}{A}$ rezultă evident că A este mulțime deschisă.

Teorema 2.3.6 Pentru orice $A \subset X$ avem $C\bar{A} = \overline{C\overset{\circ}{A}}$ și $C\overset{\circ}{A} = \overline{CA}$.

DEMONSTRAȚIE: $a \in C\bar{A} \Leftrightarrow a \notin \bar{A} \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $V \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $V \subset CA \Leftrightarrow a \in \overline{CA}$, adică $C\bar{A} = \overline{C\overset{\circ}{A}}$.

Pentru cea de-a doua relație avem: $C\overline{CA} = \overline{C\overset{\circ}{CA}} = \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow C\overset{\circ}{A} = C\overline{C\overline{CA}} = \overline{CA}$.

Teorema 2.3.7 Pentru orice $A \subset X$, \bar{A} este cea mai mică mulțime închisă, relativ la relația de incluziune, care include pe A .

DEMONSTRAȚIE: $C\bar{A} = \overline{C\overset{\circ}{A}}$ și, cum $\overline{C\overset{\circ}{A}}$ este mulțime deschisă, rezultă \bar{A} mulțime închisă. Fie $F \subset X$ o mulțime închisă astfel încât $A \subset F$. Atunci $CF \subset CA$ și $C\bar{A} = \overline{C\overset{\circ}{A}} \subset CA$. Dar, întrucât $\overline{C\overset{\circ}{A}}$ este cea mai mare mulțime deschisă inclusă în CA și CF este o mulțime deschisă inclusă în CA , rezultă $CF \subset C\bar{A}$, adică $\bar{A} \subset F$.

Corolarul 2.3.2 Pentru orice $A \subset X$ mulțimea A este închisă dacă și numai dacă $A = \bar{A}$.

DEMONSTRAȚIE: Dacă A este închisă avem $A = \bar{A}$, adică A își conține toate punctele aderente și, cum $A' \subseteq A$, A își conține toate punctele de acumulare.

Să admitem că A își conține toate punctele de acumulare. Fie $a \in \bar{A}$ și presupunem că $a \notin A$. Atunci a este punct de acumulare al lui A , deci $a \in A$, contradicție; rezultă deci că $a \in A$. Cum a a fost ales arbitrar avem $\bar{A} \subseteq A$, deci $A = \bar{A}$, adică A este închisă.

Corolarul 2.3.3 O mulțime $A \subset X$ este închisă dacă și numai dacă își conține toate punctele de acumulare.

Exemplu 2.3.4 1. Pentru $X = \mathbb{R}$ și $A = [0, 1]$ avem $\bar{A} = [0, 1] = A$, adică A este închisă.

2. Mulțimile \mathbb{N}, \mathbb{Z} și \mathbb{Q} sunt închise, \mathbb{Q} însă nu.

Teorema 2.3.8 Pentru orice $A \subset X$ $\overset{\circ}{A} = \cup_{D \subset A} D$, D deschisă și $\bar{A} = \cap_{F \supset A} F$, F închisă.

DEMONSTRAȚIE: Dacă D este mulțime deschisă, $D \subset A$, rezultă că $\cup_{D \subset A} D$ este mulțime deschisă inclusă în A , deci $\cup_{D \subset A} D \subseteq \overset{\circ}{A}$.

Fie $a \in \overset{\circ}{A}$. Atunci există $D \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $D \subset A$, deci $\overset{\circ}{A} \subset \cup_{D \subset A} D$, $D \in \mathcal{V}_a$, de unde D este deschisă și $\overset{\circ}{A} = \cup_{D \subset A} D$.

Teorema 2.3.9 1. O mulțime $A \subset X$ este închisă dacă și numai dacă $\partial A \subset A$

2. O mulțime $A \subset X$ este deschisă dacă și numai dacă $\partial(CA) \subset CA$.

DEMONSTRAȚIE: 1. $\partial A = \bar{A} \cap \overline{CA} = \bar{A} \cap C\bar{A} = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$, deci $\bar{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$; A este închisă $\Leftrightarrow A = \bar{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$, adică $\partial A \subset A$.

2. A este deschisă $\Leftrightarrow CA$ este închisă $\Leftrightarrow \partial(CA) \subset CA$.

Observația 2.3.5 1. Există mulțimi în \mathbb{R} pentru care $\partial A = A$, de exemplu, $\partial \mathbb{N} = \mathbb{N}$, $\partial \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

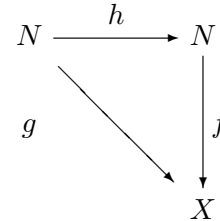
2. Fie X un spațiu metric. Dacă $A \subset B \subset X$, atunci $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ și $\bar{A} \subset \bar{B}$, dar în general $FrA \not\subset FrB$. Dacă $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ și $B = \mathbb{Q} \cup [0, 1]$ avem $A \subset B$, $FrA = \mathbb{R}$, dar $FrB = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$.

2.4 Convergența în spații metrice

Fie (X, d) un spațiu metric.

Definiția 2.4.1 Orice aplicație $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ $f(n) \stackrel{not}{=} x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ se numește șir de elemente din X și se notează $(x_n)_n$ sau simplu (x_n) . Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, x_n se numește termenul general al șirului (x_n) .

Definiția 2.4.2 Fie $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ o aplicație strict crescătoare. Se numește subșir al șirului (x_n) din X orice aplicație $g : \mathbb{N} \rightarrow X$ care realizează comutativitatea diagramei adică $(f \circ h)(n) = g(n), \forall n \in \mathbb{N}$, de unde avem $g(n) = f(h(n)) = x_{h(n)}, \forall n \in \mathbb{N}$.



Exemplu 2.4.1 $(x_{2n+1}), (x_{2n}), (x_{n^2})$ reprezintă subșiruri ale unui șir (x_n) din X .

Definiția 2.4.3 Fie (x_n) un șir de puncte din X și $l \in X$. Spunem că șirul (x_n) are limita l , sau că este convergent către l , dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, l) = 0$ sau $d(x_n, l) \rightarrow 0$ pe \mathbb{R} , $n \rightarrow \infty$. Notăm $x_n \rightarrow l$ pe X , sau dacă nu este pericol de confuzie $x_n \rightarrow l$.

Observația 2.4.1 Definiții echivalente ale limitei de șiruri.

Întrucât $d(x_n, l) \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ avem:

1. $x_n \rightarrow l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca $\forall n \geq n(\varepsilon) d(x_n, l) < \varepsilon$;
2. $x_n \rightarrow l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca $\forall n \geq n(\varepsilon) x_n \in S(l, \varepsilon)$
3. $x_n \rightarrow l \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_l, \exists n_V \in \mathbb{N}$ astfel ca $\forall n \geq n_V x_n \in V$.

Teorema 2.4.1 Unicitatea limitei

Orice șir de puncte convergent din X are limită unică.

DEMONSTRAȚIE: Presupunem că șirul convergent (x_n) de puncte din X nu are limită unică, adică există $l_1 \neq l_2$, $l_1, l_2 \in X$ astfel încât $x_n \rightarrow l_1$ și $x_n \rightarrow l_2$.

Cum $l_1 \neq l_2$, $l_1, l_2 \in X$, conform proprietății Hausdorff, există $V_1 \in \mathcal{V}_{l_1}$ și $V_2 \in \mathcal{V}_{l_2}$ astfel ca $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Din $x_n \rightarrow l_1$ și $x_n \rightarrow l_2$ folosind observația 2.4.1 punctul 3 pentru V_1 , respectiv V_2 rezultă că există $n_{V_1}, n_{V_2} \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \in V_1$, $\forall n \geq n_{V_1}$, respectiv $x_n \in V_2$, $\forall n \geq n_{V_2}$. Atunci pentru orice $n \geq \max(n_{V_1}, n_{V_2})$ avem $x_n \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$, ceea ce este fals, așadar $l_1 = l_2$.

Observația 2.4.2 Limita unui șir convergent fiind unică se poate nota $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.

Exemplu 2.4.2 1. Șirul $x_n = \left(\frac{n}{2n+1}, \frac{2^n-1}{2^n+1}, \frac{1}{n}, \sqrt[n]{2} \right)$, $n \geq 1$, din \mathbb{R}^4 , converge către $l = \left(\frac{1}{2}, 1, 0, 1 \right)$, deoarece

$$d(x_n, l) = \left[\left(\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{2^n-1}{2^n+1} - 1 \right)^2 + \frac{1}{n^2} + \left(\sqrt[n]{2} - 1 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0.$$

2. Într-un spațiu metric discret un șir este convergent dacă și numai dacă, începând de la un anumit rang, șirul este constant.

Teorema 2.4.2 Orice subșir al unui șir convergent (x_n) , de puncte din X , are aceeași limită ca șirul (x_n) .

DEMONSTRAȚIE: Fie $(x_{h(n)})$ un subșir al șirului convergent (x_n) din X , unde $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ este o aplicație strict crescătoare, $h(n) \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(x_n) este convergent $\Leftrightarrow \exists l \in X, \forall V \in \mathcal{V}_l, \exists n_V \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n \in V, \forall n \geq n_V$.

Întrucât $h(n) \geq n$ avem $x_{h(n)} \in V, \forall n \geq n_V$, adică $x_{h(n)} \rightarrow l$.

Caracterizarea mulțimilor închise cu ajutorul șirurilor

Teorema 2.4.3 Fie X un spațiu metric și $A \subset X$ o submulțime.

1. Un punct $l \in X$ aparține lui \bar{A} dacă și numai dacă există un șir (x_n) de puncte din A așa încât $x_n \rightarrow l$ pe X .
2. Mulțimea A este închisă dacă și numai dacă limita oricărui șir convergent de puncte din A aparține lui A .

DEMONSTRAȚIE.

1. Dacă $l \in \bar{A}$, atunci pentru orice $n \geq 1$ $S\left(l, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$. Fie $x_n \in A \cap S\left(l, \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$.

Obținem un șir de puncte $(x_n) \subset A$ astfel încât $d(x_n, l) < \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, adică $x_n \rightarrow l$ pe X .

Reciproc, dacă (x_n) este un șir de puncte din A și $x_n \rightarrow l$ pe X , atunci rezultă că în orice sferoid centrat în l se află puncte ale șirului, deci puncte din A , așadar $l \in \bar{A}$.

2. Presupunem mulțimea A închisă și $x_n \rightarrow l$, $x_n \in A$, $n \geq 1$. Conform punctului 1 al teoremei $l \in \bar{A}$, dar cum A este închisă, rezultă $l \in A$.

Reciproc, dacă limita oricărui șir convergent de puncte din A aparține lui A , atunci conform punctului 1 al teoremei, rezultă $\bar{A} \subseteq A$, adică mulțimea A este închisă.

Definiția 2.4.4 O submulțime $A \subset X$ a unui spațiu metric X se numește densă dacă orice punct din X este limita unui șir convergent de puncte din A .

Teorema 2.4.4 O submulțime $A \subset X$ a unui spațiu metric X este densă dacă și numai dacă $\bar{A} = X$.

DEMONSTRAȚIE. A este densă $\Leftrightarrow \forall l \in X$ este limita unui șir de puncte din $A \Leftrightarrow$ conform teoremei 2.4.3 $\forall l \in X, l \in \bar{A} \Leftrightarrow X \subset \bar{A} \Leftrightarrow X = \bar{A}$.

Exemplu 2.4.3 Pentru $X = \mathbb{R}$ submulțimile \mathbb{Q} și $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sunt dense. Într-adevăr, în orice interval $\left(l - \frac{1}{n}, l + \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$ alegem $x_n \in \mathbb{Q}$ și $y_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Atunci $x_n, y_n \rightarrow l$, deci $\bar{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} - \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Definiția 2.4.5 Un șir de puncte (x_n) din X se numește șir fundamental sau șir Cauchy dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall n, m \geq n(\varepsilon)$.

Observația 2.4.3 (x_n) este șir fundamental $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon, \forall n \geq n(\varepsilon)$ și $\forall p \geq 1$.

Definiția 2.4.6 Un șir (x_n) din X se numește mărginit dacă există $S(a, r), a \in X, r > 0$ astfel încât $x_n \in S(a, r)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.4.5 Fie (x_n) un șir de puncte din X .

1. Dacă șirul (x_n) este convergent, atunci el este fundamental.
2. Dacă șirul (x_n) este fundamental, atunci el este mărginit.

DEMONSTRAȚIE: 1. (x_n) șir convergent $\Rightarrow \exists l \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca $d(x_n, l) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n(\varepsilon)$. Pentru orice $m, n \geq n(\varepsilon)$ avem $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, l) + d(x_m, l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, adică (x_n) este șir fundamental.

2. (x_n) șir fundamental $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca $d(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall n, m \geq n(\varepsilon)$. Luând $m = n(\varepsilon)$ obținem $x_n \in S(x_{n(\varepsilon)}, \varepsilon), \forall n \geq n(\varepsilon)$. Dacă $r = \max(d(x_0, x_{n(\varepsilon)}), d(x_1, x_{n(\varepsilon)}), \dots, d(x_{n(\varepsilon)-1}, x_{n(\varepsilon)}), \varepsilon)$, atunci $x_n \in S(x_{n(\varepsilon)}, r), \forall n \in \mathbb{N}$, așadar șirul (x_n) este mărginit.

Observația 2.4.4 În general nu orice șir fundamental este convergent. \mathbb{Q} cu distanța euclidiană d este spațiu metric, fiind subspațiu al spațiului metric (\mathbb{R}, d) .

Pentru $\sqrt{2}$ considerăm șirurile aproximațiilor prin lipsă și adaos:

$$1 < 1,4 < 1,41 < \dots < \sqrt{2} \dots < 1,42 < 1,5 < 2.$$

Obținem două șiruri de numere raționale (q_n) și (q'_n) cu următoarele proprietăți:

$$q_0 < q_1 < \dots < q_n < \dots < \sqrt{2} < \dots < q'_n < \dots < q'_1 < q'_0 \quad \text{și}$$

$$q'_n - q_n = \frac{1}{10^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

După cum au fost construite cele două șiruri (q_n) și (q'_n) rezultă $q_n < \sqrt{2} < q'_n$, prin urmare,

$$\sqrt{2} - q_n < \frac{1}{10^n} \quad \text{respectiv} \quad q'_n - \sqrt{2} < \frac{1}{10^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Trecând la limită în aceste relații obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q'_n = \sqrt{2}$.

Șirul (q_n) , fiind convergent în \mathbb{R} , este fundamental în \mathbb{R} ; rezultă (q_n) șir fundamental în \mathbb{Q} , dar (q_n) nu este convergent în \mathbb{Q} , deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Așadar, reciproca teoremei 2.4.5 punctul 1 nu este, în general, adevărată.

Convergența în \mathbb{R}^m , $m \geq 1$.

Teorema 2.4.6 Considerăm (x_n) un șir de puncte din spațiul metric \mathbb{R}^m , relativ la metrica euclidiană, $x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{mn})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Șirul (x_n) este convergent, respectiv fundamental, respectiv mărginit în \mathbb{R}^m dacă și numai dacă cele m șiruri componente $(x_{1n}), (x_{2n}), \dots, (x_{mn})$ din \mathbb{R} au simultan această proprietate.

DEMONSTRAȚIE: Șirul (x_n) este convergent în $\mathbb{R}^m \Leftrightarrow \exists l = (l_1, l_2, \dots, l_m) \in \mathbb{R}^m$ astfel încât $x_n \rightarrow l$ pe \mathbb{R}^m , adică $d(x_n, l) \rightarrow 0$.

Pe de altă parte, se verifică ușor că au loc următoarele inegalități:

$$|x_{in} - l_i| \leq \max_{i=1, \overline{m}} |x_{in} - l_i| \leq \left[\sum_{i=1}^m (x_{in} - l_i)^2 \right]^{1/2} \leq \sum_{i=1}^m |x_{in} - l_i|, \quad \forall i = \overline{1, m}.$$

$$d(x_n, l) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \left[\sum_{i=1}^m (x_{in} - l_i)^2 \right]^{1/2} \rightarrow 0,$$

care împreună cu

$$|x_{in} - l_i| \leq \left[\sum_{i=1}^m (x_{in} - l_i)^2 \right]^{1/2}$$

stabilesc $|x_{in} - l_i| \rightarrow 0$, pe \mathbb{R} , $\forall i = \overline{1, m}$, adică $x_{in} \rightarrow l_i$, pe \mathbb{R} , $\forall i = \overline{1, m}$.

Reciproc, dacă $x_{in} \rightarrow l_i$, pe \mathbb{R} , $\forall i = \overline{1, m}$, atunci $\sum_{i=1}^m |x_{in} - l_i| \rightarrow 0$, care împreună cu

$$\left[\sum_{i=1}^m (x_{in} - l_i)^2 \right]^{1/2} \leq \sum_{i=1}^m |x_{in} - l_i|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ne dau $d(x_n, l) \rightarrow 0$, deci $x_n \rightarrow l$ pe \mathbb{R}^m .

Dacă șirul (x_n) este mărginit în \mathbb{R}^m , atunci există $M > 0$ astfel ca $\|x_n\| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Cum $|x_{in}| \leq \|x_n\| \leq M$, $\forall i = \overline{1, m}$, rezultă că șirul (x_{in}) mărginit $\forall i = \overline{1, m}$.

Reciproc, dacă șirurile (x_{in}) , $i = \overline{1, m}$ sunt mărginite, atunci există $M_i > 0$ astfel încât $|x_{in}| \leq M_i$, $\forall i = \overline{1, m}$ și $\forall n \in \mathbb{N}$. Dar

$$\|x_n\| \leq \sum_{i=1}^m |x_{in}| \leq \sum_{i=1}^m M_i \stackrel{\text{not}}{=} M, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

deci șirul (x_n) este mărginit în \mathbb{R}^m .

Dacă șirul (x_n) este fundamental în \mathbb{R}^m , atunci $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\left[\sum_{i=1}^m (x_{in} - x_{in+p})^2 \right]^{1/2} < \varepsilon \quad \forall n \geq n(\varepsilon) \quad \text{și} \quad \forall p \geq 1,$$

care împreună cu

$$|x_{in} - x_{in+p}| \leq \left[\sum_{i=1}^m (x_{in} - x_{in+p})^2 \right]^{1/2}$$

stabilesc $|x_{in} - x_{in+p}| < \varepsilon$, $\forall n \geq n(\varepsilon)$, $\forall p \geq 1$ și $\forall i = \overline{1, m}$, adică (x_{in}) este șir fundamental $\forall i = \overline{1, m}$.

Reciproc, dacă (x_{in}) , $i = \overline{1, m}$ sunt șiruri fundamentale, atunci $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_i(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_{in} - x_{in+p}| < \frac{\varepsilon}{m}, \quad \forall i = \overline{1, m},$$

care împreună cu

$$\left[\sum_{i=1}^m (x_{in} - x_{in+p})^2 \right]^{1/2} \leq \sum_{i=1}^m |x_{in} - x_{in+p}|$$

ne dau

$$\left[\sum_{i=1}^m (x_{in} - x_{in+p})^2 \right]^{1/2} < \varepsilon, \quad \forall n \geq \max_{i=\overline{1, m}} n_i(\varepsilon),$$

adică (x_n) este șir fundamental în \mathbb{R}^m .

Definiția 2.4.7 *Un spațiu metric X se numește complet dacă orice șir fundamental din X este convergent în X .*

Teorema 2.4.7 *\mathbb{R} este spațiu metric complet, relativ la metrica euclidiană.*

DEMONSTRAȚIE: Fie (x_n) un șir fundamental de numere reale. Din teorema 2.4.7 el este mărginit și conform lemei lui Cesaro (x_n) conține un subșir convergent, adică $\exists h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ o funcție strict crescătoare ($h(n) \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$) astfel încât $(x_{h(n)})$ este un subșir convergent al șirului (x_n) . Deoarece $(x_{h(n)})$ este un șir convergent, rezultă că $\exists l \in \mathbb{R}$ astfel ca $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n'(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ cu $|x_{h(n)} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq n'(\varepsilon)$. Pe de altă parte, cum (x_n) este șir fundamental avem că $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n''(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n, m \geq n''(\varepsilon)$. Luând $m = h(n) \geq n \geq n''(\varepsilon)$, obținem

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{h(n)}| + |x_{h(n)} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n \geq \max(n'(\varepsilon), n''(\varepsilon)),$$

așadar, (x_n) este șir convergent, adică (\mathbb{R}, d) este spațiu metric complet.

Observația 2.4.5 *Pentru orice numere reale a, b cu $a < b$, intervale $(-\infty, a]$, $[a, b]$, $[a, \infty)$ sunt spații metrice complete.*

Teorema 2.4.8 *\mathbb{R}^m , $m \geq 1$, este spațiu metric complet, relativ la metrica euclidiană (și față de celelalte metrici definite pe \mathbb{R}^m).*

DEMONSTRAȚIE: Fie (x_n) un șir fundamental de puncte din \mathbb{R}^m , $x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{mn}) \in \mathbb{R}^m$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Atunci, conform teoremei 2.4.6, cele m șiruri componente (x_{in}) de numere reale, $i = \overline{1, m}$, sunt fundamentale. Din teorema 2.4.7 rezultă că șirurile (x_{in}) , $i = \overline{1, m}$, sunt convergente în \mathbb{R} și, aplicând din nou teorema 2.4.6, obținem că șirul (x_n) este convergent în \mathbb{R}^m .

Teorema 2.4.9 *Pentru orice mulțime nevidă A , spațiul metric $\mathcal{M}(A)$ este complet, relativ la metrica uniformă.*

DEMONSTRAȚIE: Fie (f_n) un șir fundamental de elemente din $\mathcal{M}(A)$, adică un șir de funcții mărginite $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ pentru care $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$, $\forall m, n \geq n(\varepsilon)$. Deoarece $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sup_{x \in A} |f_m(x) - f_n(x)| = \|f_m - f_n\| < \varepsilon$, $\forall m, n \geq n(\varepsilon)$ și $\forall x \in A$, rezultă că pentru orice $x \in A$ șirul de numere reale $(f_n(x))$ este fundamental și, conform teoremei 2.4.7, $(f_n(x))$ este un șir convergent, care converge către un număr real $f(x)$,

unde $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Pentru ca teorema să fie demonstrată, trebuie să arătăm că $f \in \mathcal{M}(A)$ și $f_n \rightarrow f$ pe $\mathcal{M}(A)$.

Deoarece (f_n) este un șir fundamental, rezultă că $\forall \varepsilon > 0$ există un număr $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$ și $\forall p \geq 1$ să avem

$$d(f_{n+p}, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.6)$$

Pentru $n = n(\varepsilon)$ avem $d(f_{n(\varepsilon)+p}, f_{n(\varepsilon)}) < \frac{\varepsilon}{2}$, de unde obținem

$$|f_{n(\varepsilon)+p}(x) - f_{n(\varepsilon)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall p \geq 1 \quad \text{și} \quad \forall x \in A. \quad (2.7)$$

Atunci când în (2.7) $p \rightarrow \infty$ avem $|f(x) - f_{n(\varepsilon)}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x \in A$, deci $|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |f_{n(\varepsilon)}(x)|$, $\forall x \in A$. Cum $f_{n(\varepsilon)} \in \mathcal{M}(A)$, rezultă că și $f \in \mathcal{M}(A)$.

În relația (2.6) îl facem pe p să tindă la ∞ și obținem

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in A \quad \text{și} \quad \forall n \geq n(\varepsilon).$$

Atunci $d(f_n, f) = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, $\forall n \geq n(\varepsilon)$, prin urmare, $f_n \rightarrow f$ pe $\mathcal{M}(A)$. Astfel șirul (f_n) este convergent în $\mathcal{M}(A)$ și spațiul metric $\mathcal{M}(A)$ este complet.

Definiția 2.4.8 *Un spațiu vectorial normat complet $(X, \|\cdot\|)$ se numește spațiu Banach.*

Observația 2.4.6 *Din cele demonstrate anterior rezultă că spațiile vectoriale normate \mathbb{R}, \mathbb{R}^n respectiv $\mathcal{M}(A)$ sunt spații Banach.*

Definiția 2.4.9 *Fie $f : X \rightarrow X$ o aplicație definită pe spațiul metric X . Se numește punct fix al aplicației f orice element $x_0 \in X$ pentru care $f(x_0) = x_0$.*

Exemplu 2.4.4 1. Pentru funcția identică a unui spațiu metric X ,

$1_X : X \rightarrow X$ toate punctele spațiului sunt puncte fixe.

2. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^4$ are punctele fixe $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$.

Definiția 2.4.10 *Fie X un spațiu metric și $f : X \rightarrow X$ o aplicație. Spunem că f este o contracție dacă $\exists c \in [0, 1)$ astfel încât $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$, $\forall x, y \in X$.*

Dacă f este o contracție, atunci numărul real $c \in [0, 1)$ se numește coeficientul contracției f .

Teorema 2.4.10 Banach (1892-1945)

În orice spațiu metric complet X orice contracție are un singur punct fix.

DEMONSTRAȚIE: Fie $f : X \rightarrow X$ o contracție.

Unicitatea: Presupunem prin reducere la absurd că $x_1, x_2 \in X$ sunt două puncte fixe ale lui f , $x_1 \neq x_2$, adică $f(x_1) = x_1$ și $f(x_2) = x_2$. Atunci $\exists c \in [0, 1)$ astfel că $d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq cd(x_1, x_2) \Rightarrow (1 - c)d(x_1, x_2) \leq 0$. Dar, cum $x_1 \neq x_2 \Rightarrow d(x_1, x_2) > 0$ și obținem $c \geq 1$, ceea ce este o contradicție.

Existența: Ideea demonstrației este de a construi un șir fundamental. Fie $x_0 \in X$ un punct arbitrar din spațiul X . Construim șirul în felul următor: $x_1 = f(x_0)$; avem următoarele posibilități $x_1 = x_0$, deci $f(x_0) = x_0$ și am găsit un punct fix $x_0 \in X$, care este și singurul, sau $x_1 \neq x_0$, de unde $d(x_1, x_0) = \delta > 0$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots, n \geq 1$.

Arătăm că șirul construit mai sus este fundamental.

$$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq cd(x_1, x_0) = c\delta$$

$$d(x_3, x_2) = d(f(x_2), f(x_1)) \leq cd(x_2, x_1) = c^2\delta$$

.....

$$d(x_n, x_{n-1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \leq d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq c^{n-1}\delta, \quad \forall n \geq 1.$$

Atunci pentru orice $p \geq 1$ avem

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \\ &\leq c^n\delta + c^{n+1}\delta + \cdots + c^{n+p-1}\delta = \\ &= c^n\delta [1 + c + c^2 + \cdots + c^{p-1}] = c^n\delta \frac{1-c^p}{1-c}. \end{aligned}$$

Deoarece $0 \leq c < 1 \Rightarrow c^n \rightarrow 0$, deci $c^n\delta \frac{1-c^p}{1-c} \rightarrow 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$ și $\forall p \geq 1$ să avem $c^n\delta \frac{1-c^p}{1-c} < \varepsilon$. Deci $\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$ și $\forall p \geq 1$ $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$, adică șirul (x_n) este fundamental. Cum spațiul metric X este complet, rezultă (x_n) șir convergent, așadar există $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi \in X$.

$d(x_{n+1}, f(\xi)) = d(f(x_n), f(\xi)) \leq cd(x_n, \xi)$. Dar, cum $x_n \rightarrow \xi$, atunci $d(x_n, \xi) \rightarrow 0$, de unde $d(x_{n+1}, f(\xi)) \rightarrow 0$, ceea ce implică $x_{n+1} \rightarrow f(\xi)$. Deoarece, pe de altă parte, avem $x_{n+1} \rightarrow \xi$, din unicitatea limitei unui șir convergent rezultă $f(\xi) = \xi$, adică ξ este unicul punct fix al contracției f .

Observația 2.4.7 *Metoda de demonstrație folosită pentru determinarea punctului fix ξ al unei contracții f se numește metoda aproximațiilor succesive ale lui ξ . Astfel, x_0 este prima aproximație, $x_1 = f(x_0)$ a doua aproximație, $x_2 = f(x_1)$ a treia aproximație, ..., $x_n = f(x_{n-1})$ a $n+1$ aproximație a lui ξ . Acest șir de aproximații converge către ξ . Eroarea făcută în aproximarea $x_n \simeq \xi$ este cu atât mai mică cu cât n este mai mare. Dacă vrem să calculăm ξ cu aproximare mai mică decât ε , este suficient să aflăm n minim astfel ca*

$$d(x_n, \xi) \leq c^n \frac{\delta}{1-c} < \varepsilon.$$

În aplicarea efectivă a principiului contracției este important să determinăm în mod convenabil un spațiu metric complet X precum și o contracție $f: X \rightarrow X$.

Principiul contracției poate fi folosit la rezolvarea într-un spațiu metric a ecuației $f(x) = x$.

Exemplu 2.4.5 1. Fie $X = \mathbb{R}$ (sau $[a, b], [a, \infty), (-\infty, a]$). Considerăm o funcție derivabilă $f: X \rightarrow X$. Din teorema creșterilor finite rezultă că există un punct ξ situat între x_1 și x_2 , $x_1, x_2 \in X$ astfel încât $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2)$. Dacă pe X derivata funcției este mărginită și mai mult este mai mică decât 1, adică $|f'(x)| \leq c < 1, \forall x \in X$, atunci f este o contracție și putem aplica teorema 2.4.10.

Fie ecuația algebrică $x^3 + px + r = 0$, care, scriind-o sub forma $x = \frac{-r}{x^2 + p}$, reduce problema găsirii soluțiilor ecuației inițiale la determinarea punctelor fixe ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) =$

$\frac{-r}{x^2+p}$. Dacă $p = 4$ și $r = -1$ avem $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$. Arătăm că f este contracție.

$$d(f(x), f(y)) = \frac{|x+y|d(x,y)}{(x^2+4)(y^2+4)}.$$

Cu ajutorul șirului lui Rolle (1652 - 1719) găsim că ecuația $x^3 + 4x - 1 = 0$ are o singură rădăcină în intervalul $[0, 1]$. Vrem să determinăm această rădăcină cu aproximație $\leq 10^{-3}$.

Avem $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$, $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)^2}$.

$$c = \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| = \sup \frac{2x}{(x^2+4)^2} = \frac{2}{25} < 1,$$

$x_0 = 0$, $x_1 = f(x_0) = \frac{1}{4}$, $\delta = d(x_0, x_1) = \frac{1}{4}$. Determinăm cel mai mic număr natural n pentru care avem

$$\frac{\delta c^n}{1-c} < 10^{-3} \Rightarrow \frac{25}{92} c^n < 10^{-3} \Rightarrow c^n < \frac{92}{25000} \Rightarrow n = 3,$$

deci

$$\xi \simeq x_3 = f(x_2) = f\left(\frac{16}{65}\right) = \frac{1}{\left(\frac{16}{65}\right)^2 + 4} = \frac{4225}{17156} = 0,246269.$$

2. Cu ajutorul principiului contracției putem rezolva uneori și problema determinării zerourilor unei aplicații.

Considerăm cazul funcțiilor $f : [a, b] \rightarrow [-c, c]$, derivabile, strict crescătoare. Deoarece f este strict crescătoare, rezultă că $\exists m, M$ astfel încât $0 < m \leq f'(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$. Fie $p \in (m, M)$ și $g(x) = x - \frac{f(x)}{p}$, $x \in [a, b]$.

Dacă g admite un punct fix ξ , din $\xi = g(\xi)$ rezultă $f(\xi) = 0$, așadar, punctele fixe ale lui g vor fi zerouri pentru f . Pentru anumite valori ale lui p putem avea g contracție. Cum

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{p} \Rightarrow 1 - \frac{M}{p} \leq g'(x) \leq 1 - \frac{m}{p} < 1,$$

deoarece $m < p < M$, și pentru ca $|g'(x)| \leq C < 1$ trebuie să avem $p > \frac{M}{2}$. Pentru $p \in \left(\max\left\{m, \frac{M}{2}\right\}, M\right)$ g devine o contracție și se poate aplica principiul contracției.

Dacă punem $p = p(x)$, se poate extinde procedeul anterior. Pentru $p(x) = f'(x)$ obținem metoda Newton pentru determinarea zerourilor. Avem $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, iar dacă f este de două ori derivabilă și $|f(x)f'(x)| \leq cf'^2(x)$, $0 < c < 1$, atunci g este contracție și putem aplica principiul contracției.

Să calculăm aproximativ $\sqrt[p]{a}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$ folosind metoda Newton. Luăm $f(x) = x^p - a$ și

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^{p-a}}{px^{p-1}} = \frac{1}{p}[(p-1)x + ax^{1-p}].$$

Cum

$$g'(x) = \frac{p-1}{p}[1 - ax^{-p}] < \frac{p-1}{p} < 1,$$

rezultă că g definește o contracție și vom putea afla $\sqrt[p]{a} \simeq x_n$, unde x_n este al $(n+1)$ termen din șirul aproximațiilor succesive construit cu ajutorul lui g .

Pentru $p = 2$ avem $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$, iar pentru $p = 3$ $g(x) = \frac{1}{3}\left(2x + \frac{a}{x^2}\right)$.

3. Considerăm un sistem liniar de forma

$$AX = B, \quad (2.8)$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

$a_{kk} \neq 0, \forall k = \overline{1, n}$, și vrem să-i găsim soluțiile

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

$$(2.8) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + x_2 + \dots + \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n = \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 + \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 + \dots + x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}. \end{cases}$$

Astfel, sistemul liniar (2.8) devine

$$I_n X + \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} X = \bar{B},$$

deci $X = \bar{A}X + \bar{B}$, unde

$$\bar{A} = - \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Considerăm funcția $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $f(X) = \bar{A}X + \bar{B}$.

Dacă această funcție este o contracție, atunci putem aplica principiul contracției și problema este rezolvată. Să vedem când această funcție este contracție.

$$d(f(X), f(Y)) = d(\bar{A}X + \bar{B}, \bar{A}Y + \bar{B}) = \|\bar{A}(X - Y)\| \quad i$$

notăm $X - Y = Z$, $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$.

Atunci

$$\bar{A}Z = - \begin{pmatrix} \frac{a_{12}}{a_{11}}z_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}z_3 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}z_n \\ \frac{a_{21}}{a_{22}}z_1 + \frac{a_{23}}{a_{22}}z_3 + \cdots + \frac{a_{2n}}{a_{22}}z_n \\ \cdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}}z_1 + \frac{a_{n2}}{a_{nn}}z_n + \cdots + \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}z_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \|\bar{A}Z\| &= \left[\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}z_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}z_n \right)^2 + \cdots + \left(\frac{a_{n1}}{a_{nn}}z_1 + \cdots + \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}z_{n-1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left\{ \left[\left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{a_{1n}}{a_{11}} \right)^2 \right] \|Z\|^2 + \cdots + \left[\left(\frac{a_{n1}}{a_{nn}} \right)^2 + \cdots + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} \right)^2 \right] \|Z\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = c\|Z\| = c\|X - Y\| = cd(X, Y), \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} c &= \left[\left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{a_{1n}}{a_{11}} \right)^2 + \left(\frac{a_{21}}{a_{22}} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{a_{2n}}{a_{22}} \right)^2 + \cdots + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a_{n1}}{a_{nn}} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Dacă $c < 1$, atunci f devine o contracție și ecuația $X = f(X)$ are soluție unică, care se poate determina prin metoda aproximațiilor succesive.

$X_0 = 0$, $X_1 = f(X_0) = \bar{A}X_0 + \bar{B} = \bar{B}$, $X_2 = f(X_1) = \bar{A}X_1 + \bar{B} = \bar{A}\bar{B} + \bar{B}$, etc. ...

Să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} 10X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ X_1 + 10X_2 - 2X_3 = 4 \\ X_1 + 20X_3 = -2 \end{cases} \quad (2.9)$$

cu aproximație $\leq \frac{1}{3}$ folosind metoda iterativă expusă anterior.

Sistemul (2.9) este echivalent cu următorul sistem:

$$\begin{cases} x_1 = -0,1x_2 + 0,1x_3 \\ x_2 = -0,1x_1 + 0,2x_3 + 0,4 \\ x_3 = -0,05x_1 - 0,1 \end{cases} \Leftrightarrow X = \bar{A}X + \bar{B},$$

unde $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & 0,1 \\ -0,1 & 0 & 0,2 \\ -0,05 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ iar $\bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,4 \\ -0,1 \end{pmatrix}$. Considerăm funcția $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $f(X) = \bar{A}X + \bar{B}$.

$$c = \sqrt{\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}^2} = \sqrt{0,0725} < 1,$$

așadar, f este contracție și putem aplica metoda aproximațiilor succesive.

$$X_0 = 0, X_1 = f(X_0) = B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,4 \\ -0,1 \end{pmatrix}, \delta = d(X_0, X_1) = \sqrt{0,17}.$$

Determinăm cel mai mic număr natural n pentru care

$$\frac{\delta c^n}{1-c} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{0,17}(\sqrt{0,0725})^n}{1-\sqrt{0,0725}} < \frac{1}{3}.$$

Obținem $n = 1$ și, astfel, $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,4 \\ -0,1 \end{pmatrix}$ este soluția sistemului (2.9) cu aproximația $\leq \frac{1}{3}$.

2.5 Puncte limită și limite extreme ale unui șir din $\bar{\mathbb{R}}$

Definiția 2.5.1 Un număr $l \in \bar{\mathbb{R}}$ se numește punct limită al unui șir (x_n) , dacă orice vecinătate a punctului l conține o infinitate de termeni ai șirului.

Observația 2.5.1 Dacă un număr apare de o infinitate de ori într-un șir, acesta este un punct limită al șirului.

Exemplu 2.5.1 1. Șirul $x_n = \cos \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{N}$ are patru puncte limită și anume $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ și 1.

2. Șirul $x_n = -\frac{n}{1+n}, n \in \mathbb{N}$ are un singur punct limită, $l = -1$.

3. Șirul $1, 2; 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 4, 5; \dots; 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots; \dots$ are o infinitate de puncte limită. Orice număr natural este punct limită, deoarece fiecare dintre numerele naturale apare de o infinitate de ori și folosim observația 2.5.1.

4. Șirul $x_n = n$ nu are nici un punct limită finit, dar ∞ este punct limită al acestui șir.

Teorema 2.5.1 Un număr $l \in \bar{\mathbb{R}}$ este punct limită al unui șir (x_n) dacă și numai dacă există un subșir al șirului (x_n) care are limita l .

DEMONSTRAȚIE. \Leftarrow Dacă $\exists (x_{h(n)})$ astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{h(n)} = l$, unde $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ este o funcție strict crescătoare, atunci în orice vecinătate a punctului l se află o infinitate de termeni ai șirului $(x_{h(n)})$, prin urmare, o infinitate de termeni ai șirului (x_n) și, conform definiției 2.5.1, punctul l este punct limită al șirului (x_n) .

\Rightarrow Fie $l \in \bar{\mathbb{R}}$ punct limită al șirului (x_n) . Considerăm $V_1 = (l-1, l+1) \in \mathcal{V}_l$. Conform definiției 2.5.1, în această vecinătate se află o infinitate de termeni ai șirului (x_n) . Notăm $x_{h(1)}$ unul dintre acești termeni. Avem $|x_{h(1)} - l| < 1$.

În vecinătatea $V_2 = \left(l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\right) \in \mathcal{V}_l$ se află, de asemenea, o infinitate de termeni ai șirului (x_n) ; notăm $x_{h(2)}$ unul dintre acești termeni cu $h(2) > h(1)$ și avem $|x_{h(2)} - l| < \frac{1}{2}$. Prin inducție putem alege un șir de numere $(x_{h(n)})$, unde $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ este o funcție strict crescătoare astfel ca $|x_{h(n)} - l| < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{h(n)} = l$, unde $(x_{h(n)})$ este un subșir al șirului (x_n) .

Dacă $l = \infty$, respectiv $l = -\infty$ atunci vom alege vecinătățile $V_n = (n, \infty)$ ale lui ∞ , respectiv $V_n = (-\infty, -n)$ ale lui $-\infty, n \in \mathbb{N}$ și vom proceda ca mai sus.

Observația 2.5.2 Din lema lui Cesaro rezultă că orice șir mărginit are cel puțin un punct limită.

Fie (x_n) un șir de numere din \mathbb{R} . Definim $\alpha_0 = \inf_{m \geq 0} x_m$, $\alpha_1 = \inf_{m \geq 1} x_m, \dots, \alpha_n = \inf_{m \geq n} x_m, \dots$, respectiv $\beta_0 = \sup_{m \geq 0} x_m$, $\beta_1 = \sup_{m \geq 1} x_m, \dots, \beta_n = \sup_{m \geq n} x_m, \dots$. Avem $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k \leq \dots \leq \beta_p \leq \dots \leq \beta_1 \leq \beta_0, \forall k, p \in \mathbb{N}$.

Definiția 2.5.2 Se numește limita inferioară a șirului (x_n) elementul

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \geq n} x_m \in \bar{\mathbb{R}},$$

și care se notează $\alpha = \underline{\lim} x_n$.

Se numește limita superioară a șirului (x_n) elementul

$$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} x_m \in \bar{\mathbb{R}},$$

și care se notează $\beta = \overline{\lim} x_n$.

Observația 2.5.3 1. $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \geq n} x_m = \sup_n \inf_{m \geq n} x_m$ deoarece (α_n) este un șir crescător și mărginit, iar $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} x_m = \inf_n \sup_{m \geq n} x_m$ deoarece (β_n) este un șir descrescător și mărginit.

2. $\alpha \leq \beta$, deci $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$.

3. Limita inferioară, respectiv limita superioară există pentru orice șir din \mathbb{R} , deși nu orice șir de numere are limită.

Exemplu 2.5.2 1. Dacă $x_n = (-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{pentru } n \text{ par} \\ -1, & \text{pentru } n \text{ impar} \end{cases}$ avem $\alpha_n = -1$ și $\beta_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, deci $\underline{\lim} x_n = -1$ și $\overline{\lim} x_n = 1$.

2. Dacă $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$, atunci $\underline{\lim} x_n = 0$, iar $\overline{\lim} x_n = 1$.

3. Fie $a \geq 0$ și $x_n = (-1)^n \left(a + \frac{1}{n}\right)$. Atunci

$$\inf_{m \geq n} (-1)^m \left(a + \frac{1}{m}\right) = \begin{cases} -a - \frac{1}{n} & , \quad \text{dacă } n \text{ impar} \\ -a - \frac{1}{n+1} & , \quad \text{dacă } n \text{ par} \end{cases}$$

$$\sup_{m \geq n} (-1)^m \left(a + \frac{1}{m}\right) = \begin{cases} a + \frac{1}{n+1} & , \quad \text{dacă } n \text{ impar} \\ a + \frac{1}{n} & , \quad \text{dacă } n \text{ par} \end{cases},$$

$$\text{deci } \underline{\lim} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(-a - \frac{1}{n}\right) = -a, \quad \overline{\lim} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(a + \frac{1}{n}\right) = a.$$

Teorema 2.5.2 Fie (x_n) un șir de elemente din \mathbb{R} și $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$.

1. $a = \underline{\lim} x_n$ dacă și numai dacă $\forall u < a$ mulțimea $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n < u\}$ este finită și $\forall v > a$ mulțimea $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n < v\}$ este infinită.
2. $b = \overline{\lim} x_n$ dacă și numai dacă $\forall u < b$, mulțimea $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n > u\}$ este infinită și $\forall v > b$ mulțimea $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n > v\}$ este finită.

DEMONSTRAȚIE: 1. Fie $a = \underline{\lim} x_n \Rightarrow a = \alpha = \sup_n \inf_{m \geq n} x_m = \sup_n \alpha_n$. Dacă $a = -\infty$, atunci $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n = -\infty$ și pentru orice $v > a$, mulțimea $\{n \in \mathbb{N} | x_n < v\}$ rezultă infinită.

Presupunem $a \in \mathbb{R}$. Atunci $\forall u < a$, $\exists n_0$ astfel încât $u < \alpha_{n_0} < a$, deci pentru $\forall n \geq n_0 \quad x_n \geq \alpha_{n_0} > u$, adică $\{n \in \mathbb{N} | x_n < u\}$ este finită. Dacă $v > a$ atunci, evident, mulțimea $\{n \in \mathbb{N} | x_n < v\}$ este infinită.

Reciproc, presupunem că $\forall u < a$ mulțimea $\{n \in \mathbb{N} | x_n < u\}$ este finită și $\forall v > a$ mulțimea $\{n \in \mathbb{N} | x_n < v\}$ este infinită. Fie $\alpha = \underline{\lim} x_n$. Dacă $a = -\infty$ atunci $a \leq \alpha$. Dacă $-\infty < a$ și $u < a$, atunci $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \geq u, \forall n \geq n_0$, deci $\alpha_{n_0} \geq u$, de unde $u \leq \alpha$. Pentru orice $u < a$ avem $u \leq \alpha$, așadar $a \leq \alpha$. Cum, pentru orice $v > a$ mulțimea $\{n \in \mathbb{N} | x_n < v\}$ este infinită, rezultă că $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n < v, \forall n \geq n_1$, deci $\alpha_{n_1} \leq v$, de unde $\alpha \leq v$. Obținem că pentru orice $v > a$ avem $\alpha \leq v$, de unde $\alpha \leq a$ și deci $a = \alpha$.

2. Se arată în mod analog ca și la punctul 1.

Teorema 2.5.3 Fie (x_n) un șir de elemente din \mathbb{R} .

1. $\underline{\lim} x_n$ și $\overline{\lim} x_n$ sunt puncte limită pentru șirul (x_n) și pentru orice alt punct limită ξ avem $\underline{\lim} x_n \leq \xi \leq \overline{\lim} x_n$.
2. Șirul (x_n) are limita l în \mathbb{R} dacă și numai dacă $\underline{\lim} x_n = l = \overline{\lim} x_n$.

DEMONSTRAȚIE: 1. (α_n) respectiv (β_n) sunt subșiruri ale șirului (x_n) și au limitele $\underline{\lim} x_n$ respectiv $\overline{\lim} x_n$ și, conform teoremei 2.5.1, aceste limite sunt puncte limite ale șirului (x_n) . Dacă ξ este un punct limită al șirului (x_n) , atunci există o funcție strict crescătoare $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{h(n)} = \xi$. Deoarece $\alpha_n = \inf_{m \geq n} x_m$, respectiv $\beta_n = \sup_{m \geq n} x_m$ și, cum $h(n) \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$, avem $\alpha_n \leq x_{h(n)} \leq \beta_n$ de unde rezultă $\underline{\lim} x_n \leq \xi \leq \overline{\lim} x_n$.

2. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, atunci orice subșir al șirului (x_n) va avea limita l , deci toate punctele limită coincid cu l , prin urmare, $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = l$.

Reciproc, dacă $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = l$, pentru orice vecinătate $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ a lui $l, \varepsilon > 0$, mulțimile $\{n \in \mathbb{N} | x_n \leq l - \varepsilon\}$ și $\{n \in \mathbb{N} | l + \varepsilon \leq x_n\}$ sunt finite, conform teoremei 2.5.2. Rezultă că în afara vecinătății $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ se află un număr finit de termeni ai șirului (x_n) , așadar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.

Capitolul 3

Funcții continue

3.1 Funcții continue

În acest capitol vom studia comportarea unei funcții f definită pe o submulțime a unui spațiu metric, într-un punct $a \in X$. Problema care se pune este dacă pentru valori suficient de "aproape" de a , valorile funcției $f(x)$ pot fi oricât de aproape de $f(a)$.

Fie X, Y două spații metrice, $A \subset X$ o submulțime nevidă a lui X , $f : A \rightarrow Y$ o funcție și $a \in A$.

Definiția 3.1.1 *Funcția f este continuă în punctul a dacă, pentru orice șir (x_n) de elemente din A cu $x_n \rightarrow a$ pe X , rezultă că $f(x_n) \rightarrow f(a)$ pe Y .*

Funcția f este continuă pe mulțimea A dacă este continuă în fiecare punct al mulțimii A .

Observația 3.1.1 *Problema continuității nu are sens în punctele în care funcția nu este definită.*

Teorema 3.1.1 *Dacă (X, d) și (Y, d') sunt două spații metrice, $\emptyset \neq A \subset X$, $f : A \rightarrow Y$ o funcție și $a \in A$, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. f este continuă în a ;
2. $\forall V \in \mathcal{V}_{f(a)}, \exists U \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $\forall x \in U \cap A \Rightarrow f(x) \in V$;
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x \in A$ cu $d(x, a) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

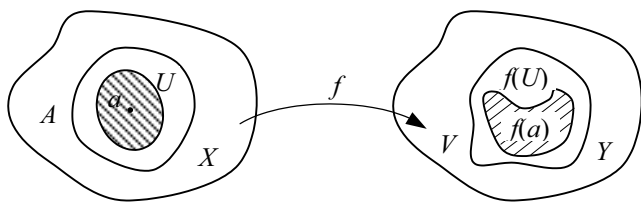


Figura 3.1:

DEMONSTRAȚIE: $1 \Rightarrow 2$ Presupunem că f este continuă în a și afirmația 2 nu este adevărată. Atunci există $V_0 \in \mathcal{V}_{f(a)}$ astfel încât pentru orice $U \in \mathcal{V}_a$, există $x_U \in U \cap A$ cu $f(x_U) \notin V_0$.

Pentru orice $n \geq 1$ considerăm vecinătățile $U_n = S(a, \frac{1}{n}) \in \mathcal{V}_a$. Atunci există $x_n \in U_n \cap A$ astfel încât $f(x_n) \notin V_0$. Șirul (x_n) construit

are proprietatea: $x_n \in A$, $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ și $f(x_n) \notin V_0, \forall n \in \mathbb{N}$, ceea ce contrazice ipoteza.

$2 \Rightarrow 3$ Presupunem că are loc afirmația 2 și fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $V = S(f(a), \varepsilon) \in \mathcal{V}_{f(a)}$, conform ipotezei, există $U \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $\forall x \in U \cap A$ implică $f(x) \in V$. Cum $U \in \mathcal{V}_a$, rezultă că există $\delta(\varepsilon) = \delta > 0$ astfel ca $\forall x \in S(a, \delta) \cap A$ avem $f(x) \in S(f(a), \varepsilon)$ sau echivalent $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x \in A$ cu $d(x, a) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$, adică afirmația 3.

$3 \Rightarrow 1$ Presupunem afirmația 3 îndeplinită și fie (x_n) un șir de elemente din A , $x_n \rightarrow a$ pe X . Pentru $\forall \varepsilon > 0$ alegem $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât să se verifice 3. Există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca $\forall n \geq n(\varepsilon)$

$d(x_n, a) < \delta(\varepsilon)$ și cu condiția 3 avem $d'(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$, ceea ce este echivalent cu $f(x_n) \rightarrow f(a)$ pe Y , adică funcția f este continuă în punctul a .

Exemplu 3.1.1 1. Fie X un spațiu metric. Aplicația identică $1_X : X \rightarrow X$ este continuă pe X . Într-adevăr, dacă $a \in X$ este un punct arbitrar, iar (x_n) este un șir de puncte al spațiului X , $x_n \rightarrow a$ pe X , atunci $1_X(x_n) = x_n \rightarrow a = 1_X(a)$ pe X .

2. Dacă (X, d) este un spațiu metric, atunci distanța $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ este o aplicație continuă. Într-adevăr, dacă $(a, b) \in X \times X$ și $x_n \rightarrow a$ pe X , $y_n \rightarrow b$ pe X , $(x_n, y_n) \in X \times X$, atunci din inegalitatea:

$$|d(x_n, y_n) - d(a, b)| \leq d(x_n, a) + d(y_n, b),$$

rezultă $d(x_n, y_n) \rightarrow d(a, b)$.

3. În orice spațiu vectorial normat X , norma $q : X \rightarrow \mathbb{R}$ este o aplicație continuă, deoarece putem scrie $q(x) = d(x, 0)$, iar (X, d) unde $d(x, y) = q(x - y)$ este un spațiu metric și, conform exemplului 2, distanța d este o aplicație continuă.

4. Fie $(X_1, q_1), (X_2, q_2), \dots, (X_n, q_n)$ spații vectoriale normate. Pe spațiul vectorial $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, definim norma $q(x) = \max_{i=1, \dots, n} q_i(x_i)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$. Aplicația proiecție $p_i : X \rightarrow X_i$, $p_i(x) = x_i$, $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$, $i = 1, \dots, n$, este continuă.

Avem $q_i(p_i(x) - p_i(a)) = q_i(x_i - a_i) \leq \max_{i=1, \dots, n} q_i(x_i - a_i) = q(x - a)$, $\forall x, a \in X$.

Fie $\varepsilon > 0$ și alegem $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Pentru orice $x \in X$ pentru care $q(x - a) < \delta(\varepsilon)$ rezultă $q_i(p_i(x) - p_i(a)) < \varepsilon$, adică aplicația p_i este continuă în punctul a . Cum a a fost ales arbitrar în spațiul X , rezultă p_i continuă pe spațiul X .

Teorema 3.1.2 Fie X, Y, Z spații metrice, $\emptyset \neq A \subset X$, $\emptyset \neq B \subset Y$, $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow Z$ două funcții și $a \in A$. Dacă funcția f este continuă în punctul a , iar funcția g este continuă în punctul $f(a)$, atunci funcția $g \circ f : A \rightarrow Z$ este continuă în a .

DEMONSTRAȚIE: Fie (x_n) un șir de puncte din X , $x_n \rightarrow a$ pe X . Din continuitatea funcțiilor f și g în punctele a , respectiv $f(a)$ obținem $f(x_n) \rightarrow f(a)$ pe Y și $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(a))$ pe Z .

Așadar, $(g \circ f)(x_n) \rightarrow (g \circ f)(a)$ pe Z , adică $g \circ f$ este continuă în punctul a .

Corolarul 3.1.1 Dacă $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, f este continuă pe X , g este continuă pe Y , atunci $g \circ f : X \rightarrow Z$ este continuă pe X .

Fie X, Y spații metrice, $\emptyset \neq A \subset X$. Notăm

$$C^0(A; Y) = \{f : A \rightarrow Y \mid f \text{ continuă pe } A\}.$$

Teorema 3.1.3 Dacă $(Y, \|\cdot\|)$ este un spațiu vectorial normat și $f \in C^0(A; Y)$, atunci funcția $\|f(\cdot)\| : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\|f(\cdot)\| \in C^0(A; \mathbb{R})$.

DEMONSTRAȚIE: Cum în orice spațiu vectorial normat Y norma este funcție continuă pe Y , iar f este continuă pe A , din teorema 3.1.2 rezultă că funcția $\|f(\cdot)\| \in C^0(A; \mathbb{R})$.

Teorema 3.1.4 Dacă $(Y, \|\cdot\|)$ este un K -spațiu normat, atunci mulțimea $C^0(A; Y)$ este un spațiu vectorial peste corpul K ($K = \mathbb{R}$ sau \mathbb{C}).

DEMONSTRAȚIE: Considerăm $f, g \in C^0(A; Y)$ și vrem să arătăm că $\alpha f + \beta g \in C^0(A; Y)$, $\forall \alpha, \beta \in K$.

Fie $a \in A$ și (x_n) un șir de puncte în A , $x_n \rightarrow a$ pe X . Are loc următoarea relație:

$$\begin{aligned} \|(\alpha f + \beta g)(x_n) - (\alpha f + \beta g)(a)\| &= \|\alpha(f(x_n) - f(a)) + \beta(g(x_n) - g(a))\| \leq \\ &\leq |\alpha| \|f(x_n) - f(a)\| + |\beta| \|g(x_n) - g(a)\|. \end{aligned}$$

Din teorema 3.1.3 și din continuitatea funcțiilor f și g în punctul a , rezultă că $(\alpha f + \beta g)(x_n) \rightarrow (\alpha f + \beta g)(a)$ pe Y . Cum punctul $a \in A$ a fost ales arbitrar, obținem $(\alpha f + \beta g) \in C^0(A; Y)$.

Teorema 3.1.5 *Fie X, Y două spații metrice și $f : X \rightarrow Y$ o funcție. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. f este continuă pe X ;
2. Pentru orice deschis $D \subset Y \Rightarrow f^{-1}(D)$ este deschis în X ;
3. Pentru orice închis $F \subset Y \Rightarrow f^{-1}(F)$ este închis în X .

DEMONSTRAȚIE: $1 \Rightarrow 2$ Presupunem că funcția f este continuă pe X ; fie $D \subset Y$ un deschis în Y și $a \in f^{-1}(D)$. Atunci $f(a) \in D$ și, cum D este deschis în Y , există $\varepsilon > 0$ astfel ca $S(f(a), \varepsilon) \subset D$. Din teorema 3.1.1 există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x \in S(a, \delta(\varepsilon)) \Rightarrow f(x) \in S(f(a), \varepsilon)$, sau echivalent $f(S(a, \delta(\varepsilon))) \subset S(f(a), \varepsilon) \subset D$. De aici obținem $S(a, \delta(\varepsilon)) \subset f^{-1}(D)$, adică $f^{-1}(D)$ este un deschis în X .

$2 \Leftrightarrow 3$ Rezultă imediat folosind relația $f^{-1}(Y - F) = X - f^{-1}(F)$.

$2 \Rightarrow 1$ Presupunem că are loc 2 și fie $a \in X$. Dacă $V \in \mathcal{V}_{f(a)}$, atunci există $\varepsilon > 0$ astfel ca $S(f(a), \varepsilon) \subset V$. Sferoidul $S(f(a), \varepsilon)$ fiind un deschis din Y , din ipoteză rezultă $f^{-1}(S(f(a), \varepsilon))$ deschis în X ce conține punctul a . Atunci există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $U = S(a, \delta(\varepsilon)) \subset f^{-1}(S(f(a), \varepsilon))$, de unde $f(U) \subset S(f(a), \varepsilon) \subset V$, adică funcția f este continuă în punctul a . Cum acest punct a fost ales arbitrar din spațiul X , rezultă funcția f continuă pe X .

Corolarul 3.1.2 *Dacă X este un spațiu metric și $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două funcții continue pe X , atunci mulțimile $D_1 = \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$, $D_2 = \{x \in X \mid f(x) > g(x)\}$ sunt deschise, iar mulțimile $F_1 = \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$, $F_2 = \{x \in X \mid f(x) \geq g(x)\}$ sunt închise.*

DEMONSTRAȚIE: Funcția $h : X \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$, $\forall x \in X$ este continuă pe X . Mulțimile $(-\infty, 0), (0, \infty)$ sunt deschise în \mathbb{R} , iar mulțimile $(-\infty, 0], [0, \infty)$ sunt închise în \mathbb{R} . Conform teoremei 3.1.5 mulțimile $h^{-1}((-\infty, 0)) = D_1$, $h^{-1}((0, \infty)) = D_2$ rezultă deschise în X , iar mulțimile $h^{-1}((-\infty, 0]) = F_1$, $h^{-1}([0, \infty)) = F_2$ rezultă închise în X .

Corolarul 3.1.3 *Dacă X este un spațiu metric, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două funcții continue, iar $A \subset X$ o mulțime densă a spațiului X pentru care $f|_A = g|_A$, atunci $f = g$.*

DEMONSTRAȚIE: $A \subseteq \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = F$. Mulțimea F este închisă, deoarece $F = F_1 \cap F_2$, unde F_1, F_2 sunt mulțimile din corolarul 3.1.2. Atunci $\bar{A} \subseteq \bar{F} = F$ și, cum A este densă, obținem $X \subseteq F$, adică $X = F$. Așadar, $f = g$.

Teorema 3.1.6 *Fie X un spațiu metric, Y un spațiu normat, $\emptyset \neq A \subset X$, $f : A \rightarrow Y$ și $a \in A$. Dacă funcția f este continuă în punctul a și $f(a) \neq 0_Y$, atunci există $U \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $f(x) \neq 0_Y, \forall x \in A \cap U$.*

DEMONSTRAȚIE: Deoarece $f(a) \neq 0_Y$, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $V = S(f(a), \varepsilon) \in \mathcal{V}_{f(a)}$ și $0_Y \notin V$. Din continuitatea funcției f în punctul a pentru vecinătatea V există $U \in \mathcal{V}_a$ astfel ca $f(x) \in V, \forall x \in A \cap U$ și, cum $0_Y \notin V$, obținem $f(x) \neq 0_Y, \forall x \in A \cap U$.

Corolarul 3.1.4 Dacă X este un spațiu metric, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă în a astfel ca $f(a) > 0$, respectiv $f(a) < 0$, atunci există $U \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $f(x) > 0$, respectiv $f(x) < 0$, $\forall x \in A \cap U$.

Teorema 3.1.7 Dacă X, Y sunt două spații metrice, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A$ și $f : A \rightarrow Y$ este o funcție continuă în a , atunci există $U \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $f|_{A \cap U}$ să fie mărginită.

DEMONSTRAȚIE: Fie $\varepsilon > 0$ și $V = S(f(a), \varepsilon) \in \mathcal{V}_{f(a)}$. Din continuitatea funcției f în punctul a , pentru V , există $U \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $f(x) \in S(f(a), \varepsilon)$, $\forall x \in A \cap U$, adică $f|_{A \cap U}$ este mărginită.

Teorema 3.1.8 Dacă X este un spațiu metric, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A$ și $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue în a , atunci următoarele funcții $fg, |fg|, \max(f, g), \min(f, g) : A \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue în a . Dacă $f(a) \neq 0$, atunci și funcția $\frac{g}{f} : A \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă în a .

DEMONSTRAȚIE: Demonstrația este imediată folosind definiția 3.1.1, iar pentru $\max(f, g), \min(f, g)$ și relațiile:

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}[f + g + |f - g|]$$

$$\min(f, g) = \frac{1}{2}[f + g - |f - g|].$$

Teorema 3.1.9 Dacă X este un spațiu metric, $\emptyset \neq A \subset X$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$ și $a \in A$, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. Funcția f este continuă în punctul a ;
2. Funcțiile $f_i, i = \overline{1, m}$ sunt continue în punctul a .

DEMONSTRAȚIE: $1 \Rightarrow 2$ Presupunem funcția f continuă în punctul a . Din continuitatea diagramei avem $f_i = pr_i \circ f$, $\forall i = \overline{1, m}$, unde $pr_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcțiile proiecție, care sunt continue $\forall i = \overline{1, m}$.

Conform teoremei 3.1.2 rezultă că funcțiile f_i sunt continue în punctul $a \forall i = \overline{1, m}$.

$2 \Rightarrow 1$ Presupunem funcțiile $f_i, i = \overline{1, m}$, continue în punctul a . Pentru orice șir (x_n) de puncte din A , $x_n \rightarrow a$ pe X avem $f_i(x_n) \rightarrow f_i(a)$, $\forall i = \overline{1, m}$.

$f(x_n) = (f_1(x_n), f_2(x_n), \dots, f_m(x_n)) \rightarrow (f_1(a), f_2(a), \dots, f_m(a)) = f(a)$ pe \mathbb{R}^m . Așadar, rezultă că f este continuă în punctul a .

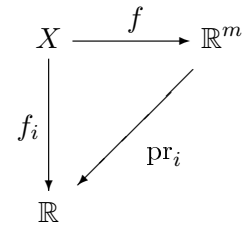


Figura 3.2:

Teorema 3.1.10 Darboux (1842 - 1917) - Bolzano (1781 - 1848)

Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ este o funcție reală continuă au loc următoarele afirmații:

1. Dacă $f(a)f(b) \leq 0$, atunci există $\xi \in [a, b]$ astfel încât $f(\xi) = 0$;
2. Dacă $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ și $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, atunci pentru orice $c \in (m, M)$ există $\eta \in [a, b]$ astfel încât $f(\eta) = c$;
3. Dacă f este strict monotonă, atunci $f : [a, b] \rightarrow [m, M]$ este o bijecție, iar inversa f^{-1} este continuă și strict monotonă.

DEMONSTRAȚIE: 1. Fie $I_0 = [a, b]$. Împărțim intervalul I_0 în două intervale închise având lungimi egale. Funcție f va lua valori de semne opuse la capetele unuia dintre aceste intervale, pe care-l vom nota I_1 . Continuând acest procedeu găsim un șir descendent de intervale închise $I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ cu lungimea intervalului I_n tinzând către zero.

Fie a_n , respectiv b_n , $n \geq 1$ capetele intervalelor I_n în care funcția este pozitivă, respectiv negativă. Din lema intervalului închis inclus există $\xi \in \bigcap_{n \geq 0} I_n$ cu $a_n \rightarrow \xi$, $b_n \rightarrow \xi$. Deoarece f este continuă, atunci rezultă $f(a_n) \rightarrow f(\xi)$, $f(b_n) \rightarrow f(\xi)$. Cum $f(a_n) \geq 0$, $f(b_n) \leq 0 \Rightarrow f(\xi) \geq 0$ și $f(\xi) \leq 0$, adică $f(\xi) = 0$.

2. Din $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ și $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in [a, b]$ astfel încât $m \leq f(\alpha) < c < f(\beta) \leq M$.

Funcția $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - c$ este continuă pe $[\alpha, \beta]$, $g(\alpha) = f(\alpha) - c < 0$, $g(\beta) = f(\beta) - c > 0$ și, aplicând punctul 1 al teoremei, există $\eta \in [\alpha, \beta]$ astfel ca $g(\eta) = 0 \Rightarrow f(\eta) = c$.

3. Din punctul 2 al teoremei avem funcția f surjectivă, iar din enunț fiind strict monotonă, ea este injectivă, deci bijectivă. Dacă $I \subset [a, b]$ este mulțime închisă, atunci $(f^{-1})^{-1}(I) = f(I)$ este, de asemenea, închisă. Conform teoremei 3.1.5 funcția f^{-1} este continuă pe $[a, b]$.

Fie (X, d) , (Y, d) două spații metrice, $\emptyset \neq A \subset X$ și $f : A \rightarrow Y$ o funcție.

Definiția 3.1.2 Fie $a \in A'$. Funcția f are limita l , $l \in Y$, în punctul a dacă funcția $g : A \cup \{a\} \rightarrow Y$, $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a \\ l, & x = a \end{cases}$ este continuă în punctul a și vom nota $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Observația 3.1.2 1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset A$, $x_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \rightarrow a$ pe $X \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l$ pe Y (definiția lui Heine)

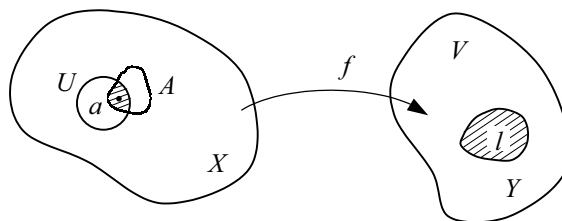


Figura 3.3:

2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_l$, $\exists U \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $\forall x \in (A \cap U) - \{a\} \Rightarrow f(x) \in V$

3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x \in A - \{a\}$ cu $d(x, a) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), l) < \varepsilon$.

Teorema 3.1.11 Dacă $Y = \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $|f(x)| \leq g(x)$, $\forall x \in A$, și $a \in A$ astfel ca $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, atunci $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

DEMONSTRAȚIE: Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x \in A - \{a\}$ cu $d(x, a) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow g(x) < \varepsilon$, $|f(x)| < \varepsilon$, adică $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Următoarea teoremă ne asigură existența limitei unei funcții într-un punct.

Teorema 3.1.12 Cauchy-Bolzano

Dacă (X, d) spațiu metric, (Y, d') spațiu metric complet, $\emptyset \neq A \subset X$ și $f : A \rightarrow Y$, atunci sunt echivalente următoarele afirmații:

1. Funcția f are limită în punctul a ;

2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists U \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $\forall x, x' \in (U \cap A) - \{a\} \Rightarrow d'(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

DEMONSTRAȚIE: $1 \Rightarrow 2$ Fie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ și $\varepsilon > 0$. Din observația 3.1.2 rezultă că există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x \in A - \{a\}$ cu $d(x, a) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), l) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luăm $U = S(a, \delta(\varepsilon))$; atunci $\forall x, x' \in (U \cap A) - \{a\}$

$$d'(f(x), f(x')) \leq d'(f(x), l) + d'(f(x'), l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$2 \Rightarrow 1$ Fie (x_n) un șir de puncte din A , $x_n \neq a$, $x_n \rightarrow a$ pe X . Există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$ $x_n \in U \cap A$, unde $U \in \mathcal{V}_a$ este vecinătatea din enunț. Deci $\forall n, m \geq n(\varepsilon)$ $d'(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$, adică șirul $(f(x_n))$ este fundamental. Cum Y este spațiu metric complet, șirul $(f(x_n))$ este convergent și fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

Arătăm că limita șirului $(f(x_n))$ nu depinde de alegerea șirului (x_n) . Fie (y_n) un șir de puncte din A , $y_n \neq a$, $y_n \rightarrow a$ pe X . Urmând același raționament ca și pentru șirul (x_n) , găsim $l_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$. Considerăm șirul $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots$. Evident acest șir are limita a , iar șirurile $(f(x_n)), (f(y_n))$ sunt subșiruri ale șirului convergent $f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \dots, f(x_n), f(y_n), \dots$.

Așadar, avem $l = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = l_1$, adică funcția f are limită în punctul a .

Exemplu 3.1.2 1. Fie

$$f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \quad .$$

Deoarece

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} |x| \leq |x| \rightarrow 0, (x, y) \rightarrow (0, 0), \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0.$$

2. Fie

$$f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad .$$

Vrem să calculăm $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$. Dacă $x \rightarrow 0$ și $y = mx \rightarrow 0$, $m \in \mathbb{R}$ atunci observăm că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{2m}{1 + m^2}.$$

În concluzie, funcția f nu are limită în punctul $(0, 0)$.

3. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x^3}{x^2 + y^2} & , \text{ dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ în rest} \end{cases} \quad ,$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{1 - \cos x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{2 \sin^2 \frac{x^3}{2}}{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin^2 \frac{x^3}{2}}{\left(\frac{x^3}{2}\right)^2} \frac{x^6}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0). \end{aligned}$$

Prin urmare, funcția f este continuă pe \mathbb{R}^2 .

3.2 Limite iterate

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A'$, $f : A \rightarrow Y$ o funcție, unde Y este un spațiu metric și $\sigma \in S_n$ o permutare a primelor n numere naturale.

Definiția 3.2.1 Dacă există limitele succesive

$$\lim_{x_{\sigma(n)} \rightarrow a_{\sigma(n)}} (\dots \lim_{x_{\sigma(1)} \rightarrow a_{\sigma(1)}} f(x)) = l_{\sigma},$$

unde $a_{\sigma(i)} \in A'_{\sigma(i)}$, $A_i = \{x_i \mid (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \in A\}$, atunci această limită se numește limită iterată a funcției f în punctul a .

Observația 3.2.1 1. Funcția f poate avea cel mult $n!$ limite iterate.

2. Dacă $n = 2$, funcția f poate avea cel mult două limite iterate, și anume, $\lim_{x \rightarrow a}(\lim_{y \rightarrow b} f(x, y))$, respectiv $\lim_{y \rightarrow b}(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y))$.

Exemplu 3.2.1

1. $f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0}(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0}(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = 0.$$
2. $f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0}(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0}(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = -1.$$
3. $f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = y \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$

$\lim_{x \rightarrow 0}(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = 0$, dar $\lim_{y \rightarrow 0}(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$ nu există.

Teorema 3.2.1 Dacă există limita funcției f în punctul a și una dintre limitele iterate în acest punct, atunci aceste limite sunt egale.

DEMONSTRAȚIE: Pentru simplificare vom demonstra în cazul $n = 2$. Fie $(a, b) \in A'$ și presupunem că există limitele $l = \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ și $l_1 = \lim_{x \rightarrow a}(\lim_{y \rightarrow b} f(x, y))$.

Pentru fiecare $x \in A_1 = pr_1 A$ vom nota $F(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$. Atunci $l_1 = \lim_{x \rightarrow a} F(x)$.

Fie $\varepsilon > 0$; deoarece $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = l$, există $U \in \mathcal{V}_{(a, b)}$ astfel încât

$$d'(f(x, y), l) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall (x, y) \in (A \cap U) - \{(a, b)\} \quad (3.1)$$

$$\lim_{y \rightarrow b} d'(f(x, y), l) = d'(F(x), l), \quad y \in A_1.$$

Din inegalitatea (3.1), obținem

$$d'(F(x), l) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \text{ astfel încât } (x, b) \in U.$$

Atunci

$$\lim_{x \rightarrow a} d'(F(x), l) = d'(\lim_{x \rightarrow a} F(x), l) = d'(l_1, l) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

adică $l = l_1$.

- Observația 3.2.2** 1. Dacă există una din limitele iterate ale funcției f într-un punct, nu rezultă că există și celelalte limite iterate în acel punct.
2. Dacă există două limite iterate ale unei funcții într-un punct și dacă ele sunt diferite, atunci funcția f nu are limită în acel punct.
3. Sunt cazuri când punctul $a \in A'$, $A \subset \mathbb{R}^n$, dar $\nexists a_i \in A'_i$. În acest caz nu are sens $\lim_{x_i \rightarrow a_i} f(x)$.

3.3 Mulțimi compacte

Definiția 3.3.1 Fie X un spațiu metric. O familie $\{D_i\}_{i \in I}$ de părți ale lui X având proprietatea $\cup_{i \in I} D_i = X$ se numește acoperire a sa. Se numește subacoperire a acoperirii $\{D_i\}_{i \in I}$ o subfamilie $\{D_i\}_{i \in J}$, $J \subset I$ astfel încât $\cup_{i \in J} D_i = X$.

Dacă $K \subset X$ este o submulțime a spațiului metric X , atunci o familie $\{D_i\}_{i \in I}$ de părți ale lui X având proprietatea $K \subset \cup_{i \in I} D_i$ se numește acoperire a mulțimii K . Se numește subacoperire a acoperirii $\{D_i\}_{i \in I}$ o subfamilie $\{D_i\}_{i \in J}$, $J \subset I$ astfel încât $K \subset \cup_{i \in J} D_i$.

Dacă mulțimea I este finită, acoperirea se numește finită.

Dacă toate mulțimile D_i sunt deschise spunem că acoperirea $\{D_i\}_{i \in I}$ este acoperire deschisă.

Definiția 3.3.2 O submulțime $K \subset X$ a unui spațiu metric X se numește compactă sau un compact al lui X , dacă din orice acoperire deschisă a ei se poate extrage o subacoperire finită, adică pentru orice familie de mulțimi deschise $\{D_i \mid i \in I, D_i \text{ deschis}\}$, astfel încât $K \subset \cup_{i \in I} D_i$, rezultă că există o submulțime finită $J \subset I$ astfel încât $K \subset \cup_{i \in J} D_i$.

Definiția 3.3.3 O submulțime $K \subset X$ a unui spațiu metric este mărginită dacă $\exists a \in K$ și $\exists r > 0$, $r \in \mathbb{R}$ astfel încât $K \subset S(a, r)$, adică dacă este conținută într-un sferoid.

Teorema 3.3.1 Orice mulțime compactă dintr-un spațiu metric este închisă și mărginită.

DEMONSTRAȚIE: K este închisă $\Leftrightarrow K = \bar{K}$. Presupunem că $\bar{K} \not\subseteq K$ și fie $x \in \bar{K}$ astfel încât $x \notin K$. Pentru orice $y \in K$ avem $x \neq y$. Cum spațiul metric este un spațiu separat, rezultă că $\exists r_y > 0$, astfel încât $S(x, r_y) \cap S(y, r_y) = \emptyset$. Sferoizii $S(y, r_y)$, $y \in K$ formează o acoperire deschisă a lui K , $K \subset \cup_{y \in K} S(y, r_y)$ și, cum K este compactă, rezultă că există o subacoperire finită a sa, adică $\exists y_1, y_2, \dots, y_p \in K$ și $\exists r_{y_1} > 0, \dots, r_{y_p} > 0$ numere reale astfel încât

$$K \subset S(y_1, r_{y_1}) \cup S(y_2, r_{y_2}) \cup \dots \cup S(y_p, r_{y_p}).$$

Luând $r = \min(r_{y_1}, \dots, r_{y_p}) > 0$, obținem $S(x, r) \cap S(y_i, r_{y_i}) = \emptyset$, $\forall i = \overline{1, p}$, de unde avem

$$S(x, r) \cap \left(\bigcup_{i=1}^p S(y_i, r_i) \right) = \emptyset \Rightarrow S(x, r) \cap K = \emptyset,$$

adică, $x \notin \bar{K}$, ceea ce contravine ipotezei $x \in \bar{K}$. Astfel $\bar{K} \subseteq K$, deci $K = \bar{K}$, adică mulțimea K este închisă. Fie $a \in X$; pentru fiecare $x \in K$ considerăm $d(x, a) \geq 0$. Conform proprietății lui Arhimede $\exists n_x \in \mathbb{N}$, astfel încât $d(x, a) < n_x \Rightarrow x \in S(a, n_x)$. Dacă $n_x = [d(x, a)] + 1$, atunci $K \subset \cup_{n_x \in \mathbb{N}} S(a, n_x)$. Mulțimea $\{S(a, n_x) \mid n_x \in \mathbb{N}\}$ constituie o acoperire deschisă a lui K și, cum K este compactă, din această acoperire se poate extrage o subacoperire finită, deci $\exists n_1 > 0 \dots, n_m > 0$ astfel încât $K \subset S(a, n_1) \cup S(a, n_2) \cup \dots \cup S(a, n_m)$. Luând $n = \max_{i=\overline{1, m}} n_i > 0$, obținem $K \subset S(a, n)$, adică mulțimea K este mărginită.

Teorema 3.3.2 *Caracterizarea mulțimilor compacte cu șiruri.*

O submulțime $K \subset X$ a unui spațiu metric este compactă dacă și numai dacă pentru orice șir de puncte din K există un subșir convergent în K , adică $\forall (x_n) \subset K, \exists (x_{f(n)})$ subșir astfel încât $x_{f(n)} \rightarrow \xi \in K$.

DEMONSTRAȚIE: Presupunem mulțimea K compactă și fie (a_n) un șir de puncte din K , astfel încât acest șir nu conține subșiruri convergente în X . Dacă ar conține un subșir convergent în X , atunci $x_{f(n)} \rightarrow \xi \in X, x_{f(n)} \in K$. Din teorema 2.4.3 $\xi \in \bar{K}$ și, cum K este compactă, K este închisă, deci $\xi \in K$.

Considerăm acum mulțimile

$$D_0 = X - \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}, D_1 = X - \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}, \dots, D_n = X - \{x_n, x_{n+1}, \dots\} \dots$$

care au proprietățile:

$$D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots \quad (3.2)$$

și $K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$.

Fie $y \in D_0$. Dacă pentru orice $r > 0$ $S(y, r)$ conține termeni ai șirului (x_n) , luăm $r = \frac{1}{n}$, $x_n \in S\left(y, \frac{1}{n}\right)$. Obținem astfel un șir de puncte $x_{f(n)} \rightarrow y$, ceea ce contravine faptului, că nici un subșir al șirului (x_n) nu este convergent în X . Deci $\exists r > 0$, astfel ca $S(y, r) \subset D_0$, prin urmare, D_0 este o mulțime deschisă, iar din (3.2) avem (D_n) șir de mulțimi deschise, care formează o acoperire deschisă a lui K . Cum K este o mulțime compactă, se poate extrage o subacoperire finită a sa, $K \subset D_{n_1} \cup D_{n_2} \cup \dots \cup D_{n_p} = D_n$, unde $n = \max_{i=1, \dots, p} n_i$, deci $K \subset D_n$. Dar din modul de definire al mulțimilor D_n avem $x_n \notin D_n$ și $x_n \in K$. Am obținut astfel o contradicție, așadar orice șir de elemente din K conține un subșir convergent în K .

Pentru a demonstra reciproca vom arăta următoarele:

1. $\forall \varepsilon > 0$ există o acoperire finită a lui K formată din sferoizi de rază ε , adică $K \subset S(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup S(x_p, \varepsilon)$ unde $x_1, x_2, \dots, x_p \in K$.
2. Dacă $K \subset \bigcup_{i \in I} D_i$ este o acoperire deschisă, atunci $\exists \varepsilon_0 > 0$, astfel încât $\forall x \in K, \exists i_x \in I$ cu $S(x, \varepsilon_0) \subset D_{i_x}$.

Presupunem că $\exists \varepsilon_0 > 0$ astfel încât nu avem o acoperire finită a lui K de sferoizi deschiși de rază ε_0 . Dacă $x_0 \in K$ și $K \not\subset S(x_0, \varepsilon_0)$, atunci $\exists x_1 \in K$ astfel ca $x_1 \notin S(x_0, \varepsilon_0)$, deci $d(x_1, x_0) \geq \varepsilon_0$.

Dacă $K \not\subset S(x_0, \varepsilon_0) \cup S(x_1, \varepsilon_0)$, atunci $\exists x_2 \in K$ astfel ca $x_2 \notin S(x_0, \varepsilon_0) \cup S(x_1, \varepsilon_0) \Rightarrow d(x_2, x_0) \geq \varepsilon_0$ și $d(x_2, x_1) \geq \varepsilon_0$. Continuând procedeul, formăm un șir de elemente din K , $(x_n) \subset K$ astfel încât $\forall p, q \in \mathbb{N}$ $d(x_p, x_q) \geq \varepsilon_0$. Acest șir nu poate avea nici un subșir convergent în X . Dacă $(x_{f(n)})$ ar fi un subșir al șirului (x_n) , convergent în X , atunci $(x_{f(n)})$ ar fi șir fundamental adică $\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca $\forall p, q \geq n(\varepsilon)$ $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ și obținem astfel o contradicție. Prin urmare $\forall \varepsilon > 0, K \subset S(x_1, \varepsilon) \cup S(x_2, \varepsilon) \cup \dots \cup S(x_p, \varepsilon)$ cu $x_1, x_2, \dots, x_p \in K$.

Pentru a arăta afirmația a doua presupunem că $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in K$ astfel ca $\forall i \in I$ $S(x_\varepsilon, \varepsilon) \not\subset D_i$. Luăm $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ există $x_n \in K$ astfel încât $S\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset D_i, \forall i \in I$. Dar din ipoteză avem că șirul (x_n) din K conține un subșir convergent în K , adică există $(x_{f(n)})$ astfel încât $x_{f(n)} \rightarrow \xi \in K$.

Cum $K \subset \bigcup_{i \in I} D_i$, există $i_0 \in I$ astfel încât $\xi \in D_{i_0}$. Deoarece D_{i_0} este un deschis, există $r > 0, r \in \mathbb{R}$ cu $S(\xi, r) \subset D_{i_0}$.

Pentru n suficient de mare avem $d(x_{f(n)}, \xi) < \frac{r}{2}$ și $\frac{1}{f(n)} < \frac{r}{2}$. Arătăm că are loc următoarea incluziune $S\left(x_{f(n)}, \frac{1}{f(n)}\right) \subset S(\xi, r)$. Pentru aceasta fie

$$y \in S\left(x_{f(n)}, \frac{1}{f(n)}\right);$$

$$d(y, \xi) \leq d(y, x_{f(n)}) + d(x_{f(n)}, \xi) \leq \frac{1}{f(n)} + \frac{r}{2} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

prin urmare, $S\left(x_{f(n)}, \frac{1}{f(n)}\right) \subset S(\xi, r) \subset D_{i_0}$, contradicție.

Pentru acoperirea deschisă $\{D_i \mid i \in I\}$ a lui K alegem un $\varepsilon > 0$ astfel încât să se verifice proprietatea 2. Conform proprietății 1, pentru acest ε există o acoperire finită a lui K cu sferoizi de rază ε , adică $K \subset S(x_1, \varepsilon) \subset S(x_2, \varepsilon) \cup \dots \cup S(x_n, \varepsilon)$ cu $S(x_j, \varepsilon) \subset D_{i_{x_j}}, \forall j = \overline{1, n}$.

Am obținut astfel $K \subset D_{i_{x_1}} \cup D_{i_{x_2}} \cup \dots \cup D_{i_{x_n}}$, adică K este o mulțime compactă.

Corolarul 3.3.1 *Un spațiu metric X este compact dacă și numai dacă orice șir de puncte din X conține un subșir convergent.*

Teorema 3.3.3 *Orice interval $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ închis și mărginit pe \mathbb{R} este compact.*

DEMONSTRAȚIE: Dacă (x_n) este un șir de puncte din $[a, b]$, atunci el este mărginit și, conform lemei lui Cesaro, acest șir conține un subșir convergent către un punct $\xi \in \overline{[a, b]} = [a, b]$. Din teorema 3.3.2 obținem că intervalul închis și mărginit $[a, b]$ din \mathbb{R} este un compact.

Teorema 3.3.4 *Dacă X și Y sunt spații metrice compacte, atunci spațiul metric $X \times Y$ este compact.*

DEMONSTRAȚIE: Pe mulțimea $X \times Y$ se introduce distanța

$$d(x, y) = \sqrt{d_X^2(x_1, x_2) + d_Y^2(y_1, y_2)}, \quad \forall x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2) \in X \times Y.$$

Considerăm șirul $((x_n, y_n))$ de puncte din $X \times Y$. Cum $(x_n) \subset X$, iar X este spațiu metric compact, rezultă că există subșirul convergent $(x_{f(n)})$ al șirului (x_n) , $x_{f(n)} \rightarrow a \in X$, unde $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ este o funcție strict crescătoare. Y fiind spațiu metric compact, șirul $(y_{f(n)}) \subset Y$ are un subșir convergent (teorema 3.3.2) $(y_{g(f(n))})$, $y_{g(f(n))} \rightarrow b \in Y$, unde $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ este o funcție strict crescătoare.

Evident $x_{g(f(n))} \rightarrow a$ și am găsit subșirul $((x_{g(f(n))}, y_{g(f(n))}))$ al șirului $((x_n, y_n))$ din $X \times Y$ convergent către $(a, b) \in X \times Y$. Prin urmare, conform teoremei 3.3.2, rezultă $X \times Y$ spațiu metric compact.

Corolarul 3.3.2 *Orice paralelipiped închis $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_p, b_p]$ din \mathbb{R}^p este compact, $p \geq 1$.*

DEMONSTRAȚIE: Din teorema 3.3.3 intervalul $[a_i, b_i]$ din \mathbb{R} este compact, $\forall i = \overline{1, p}$. P fiind produs cartezian finit de mulțimi compacte, rezultă conform teoremei 3.3.4 P este un compact.

Caracterizarea mulțimilor compacte din $\mathbb{R}^p, p \geq 1$.

Teorema 3.3.5 *Heine - Borel*

O submulțime $K \subset \mathbb{R}^p, p \geq 1$ este compactă dacă și numai dacă este închisă și mărginită.

DEMONSTRAȚIE: Necesitatea a fost arătată la teorema 3.3.1. Pentru a demonstra suficiența, fie $K \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime închisă și mărginită. Atunci există un paralelipiped $P \subset \mathbb{R}^p$, $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_p, b_p]$ astfel încât $K \subseteq P$.

Dacă (x_n) este un șir de puncte din K , atunci $(x_n) \subset P$ și, cum P este compact, șirul (x_n) conține un subșir convergent $x_{f(n)} \rightarrow \xi$ în P , unde $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ este o funcție strict crescătoare; $x_{f(n)} \in K \Rightarrow \xi \in \bar{K} = K$, adică șirul (x_n) conține un subșir convergent $x_{f(n)} \rightarrow \xi$ în K și, conform teoremei 3.3.2, mulțimea K este compactă.

Observația 3.3.1 1. Dacă $K \subset \mathbb{R}^p$ nu este închisă sau nu este mărginită, există acoperiri ale lui K cu intervale deschise, din care nu se poate extrage o subacoperire finită, adică K nu este un compact. Dacă $K = (-1, 1)$, intervalele $\left(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$ constituie o acoperire a lui K , dar din care nu se poate extrage o subacoperire finită. Dacă $K = [0, \infty)$, intervalele $(n-2, n)$, $n \geq 1$ constituie o acoperire a lui K , dar din care nu se poate extrage o subacoperire finită.

2. Orice mulțime finită $K = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset X$, unde X este un spațiu metric, este închisă și mărginită, deci compactă.

3. Orice reuniune finită de mulțimi compacte este compactă.

4. Intervalele (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$ nu sunt compacte deoarece nu sunt închise, ca și spațiile \mathbb{R} și \mathbb{R}^2 deoarece nu sunt mărginite.

5. Sfera $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ și elipsoidul plin $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 \leq 1\}$ sunt mulțimi compacte.

3.4 Continuitate pe compacte

Teorema 3.4.1 Dacă X, Y sunt două spații metrice, $\emptyset \neq K \subset X$ un compact și $f : K \rightarrow Y$ o funcție continuă pe K , atunci $f(K) \subset Y$ este un compact.

DEMONSTRAȚIE: Fie $(D_i \mid i \in I)$ o acoperire cu deschiși din Y a lui $f(K)$, deci $f(K) \subset \bigcup_{i \in I} D_i$. Atunci

$$K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} D_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(D_i).$$

Deoarece f este continuă pe K , iar D_i sunt deschiși în Y , conform teoremei 3.1.5, rezultă că mulțimile $f^{-1}(D_i)$, $i \in I$ sunt deschise în X . Cum aceste mulțimi formează o acoperire a lui K , iar K este un compact, există mulțimea $J \subset I$ finită astfel ca $K \subset \bigcup_{i \in J} f^{-1}(D_i)$.

$$f(K) \subset f\left(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(D_i)\right) = \bigcup_{i \in J} f(f^{-1}(D_i)) \subset \bigcup_{i \in J} D_i.$$

Așadar, din acoperirea $(D_i \mid i \in I)$ a lui $f(K)$ am extras o subacoperire finită $(D_i \mid i \in J)$, adică $f(K) \subset Y$ este un compact.

Definiția 3.4.1 O funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ își atinge marginile dacă $\exists \alpha, \beta \in A$ astfel încât $\inf_{x \in A} f(x) = f(\alpha)$ și $\sup_{x \in A} f(x) = f(\beta)$.

Teorema 3.4.2 Orice funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definită și continuă pe un compact A dintr-un spațiu metric X este mărginită și își atinge marginile.

DEMONSTRAȚIE: Întrucât f este continuă pe A și $A \subset X$ compact, conform teoremei 3.4.1, rezultă $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ compact, iar din teorema 3.3.1 $f(A)$ este mărginită și închisă; $\inf_{x \in A} f(x), \sup_{x \in A} f(x) \in \bar{f(A)} = f(A)$, deci f își atinge marginile.

3.5 Mulțimi conexe

Fie X un spațiu metric fixat.

Definiția 3.5.1 O submulțime $C \subset X$ se numește *neconexă* dacă există două mulțimi deschise nevide D_1 și D_2 în X astfel încât

$$\begin{aligned} D_1 \cap D_2 \cap C &= \emptyset \\ D_1 \cap C \neq \emptyset, \quad D_2 \cap C \neq \emptyset \quad \text{și} \quad C &\subset D_1 \cup D_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Un spațiu metric X se numește *neconex* dacă există două mulțimi deschise nevide D_1 și D_2 în X astfel încât $X = D_1 \cup D_2$ și $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

O submulțime $C \subset X$ se numește *conexă* dacă nu este *neconexă*.

Observația 3.5.1 a) Spațiul X este conex \Leftrightarrow orice submulțime nevidă simultan închisă și deschisă în X coincide cu X .

b) A spune că o mulțime $C \subset X$ este conexă înseamnă că aceasta "este formată dintr-o singură bucată".

Exemplu 3.5.1 1. Într-un spațiu metric mulțimea formată dintr-un singur punct este conexă.

2. Într-un spațiu metric X mulțimea formată din 2 puncte distincte este *neconexă*. Într-adevăr, dacă $C = \{a, b\} \in X, a \neq b$, atunci pentru $D_1 = X - \{a\}$, $D_2 = X - \{b\}$ se verifică (3.3).

3. Mulțimea $C = (-1, 1] \cup (4, 5)$ este *neconexă*, deoarece pentru $D_1 = (-1, 2)$ și $D_2 = (4, 5)$ se verifică (3.3).

4. Sferele sunt conexe.

5. În plan o coroană circulară este conexă.

3.6 Continuitate pe conexe

Teorema 3.6.1 Fie X, Y două spații metrice și $f : X \rightarrow Y$ o aplicație continuă. Dacă $A \subset X$ mulțimea este conexă, atunci mulțimea $f(A) \subset Y$ este conexă.

DEMONSTRAȚIE: Presupunem că $f(A)$ este *neconexă*. Din (3.3) există două mulțimi deschise nevide A_1 și A_2 în Y astfel încât $A_1 \cap A_2 \cap f(A) = \emptyset$, $A_1 \cap f(A) \neq \emptyset$, $A_2 \cap f(A) \neq \emptyset$ și $f(A) \subset A_1 \cup A_2$. Funcția f fiind continuă, rezultă că mulțimile $D_1 = f^{-1}(A_1)$ și $D_2 = f^{-1}(A_2)$ sunt deschise în X și nevide.

$A_1 \cap f(A) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists y \in A_1 \cap f(A) \Rightarrow \exists x \in A$ astfel încât $y \in A_1$ și $y = f(x) \Rightarrow x \in D_1 \cap A \Rightarrow D_1 \cap A \neq \emptyset$. În mod analog se arată că

$$D_2 \cap A \neq \emptyset. \quad (3.4)$$

Din $f(A) \subset A_1 \cup A_2 \Rightarrow A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(A_1 \cup A_2) = D_1 \cup D_2$, deci

$$A \subset D_1 \cup D_2 \quad (3.5)$$

Presupunem că $D_1 \cap D_2 \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in D_1 \cap D_2 \cap A \Rightarrow f(x) \in f(A) \cap A_1 \cap A_2 = \emptyset$, absurd, prin urmare

$$D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset. \quad (3.6)$$

Din (3.4), (3.5) și (3.6) obținem A *neconexă*, fals, așadar $f(A)$ este conexă.

Teorema 3.6.2 *O mulțime $C \subset X$ dintr-un spațiu metric este conexă dacă și numai dacă orice funcție continuă $f : C \rightarrow \{0, 1\}$ este constantă.*

DEMONSTRAȚIE: \Rightarrow Fie C conexă și presupunem că există o funcție continuă $f : C \rightarrow \{0, 1\}$ neconstantă. Atunci $f(C) = \{0, 1\}$ din teorema 3.6.1 ar rezulta conexă, ceea ce este absurd.

\Leftarrow Presupunem că orice funcție continuă $f : C \rightarrow \{0, 1\}$ este constantă. Dacă C este neconexă, atunci există mulțimile deschise și nevide D_1, D_2 în X astfel încât $C \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $D_1 \cap C \neq \emptyset$, $D_2 \cap C \neq \emptyset$ și $C \subset D_1 \cup D_2$.

Definim funcția $f : C \rightarrow \{0, 1\}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in D_1 \cap C \\ 1, & x \in D_2 \cap C. \end{cases}$$

Din $c \in D_1 \cap C \Rightarrow f(c) = 0$. Cum D_1 este un deschis în X , există $S(c, \delta) \subset D_1$ astfel încât $f(x) = 0, \forall x \in S(c, \delta) \cap C$. Analog se arată că dacă $c \in D_2 \cap C$ există $S(c, \delta_1)$ astfel încât $f(x) = 1, \forall x \in S(c, \delta_1) \cap C$, adică funcția f este continuă și neconstantă, ceea ce contrazice ipoteza. Așadar mulțimea C este conexă.

Teorema 3.6.3 *Dacă $\{C_i | i \in I, C_i \text{ conexă}\}$ este o familie de mulțimi conexe ale unui spațiu metric X astfel încât $\cap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, atunci mulțimea $\cup_{i \in I} C_i$ este conexă.*

DEMONSTRAȚIE: Fie $f : C \rightarrow \{0, 1\}$ o funcție continuă, unde $C = \cup_{i \in I} C_i$. Deoarece $\cap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, există $c \in \cap_{i \in I} C_i$. Presupunem $f(c) = 1$. Pentru orice $x \in C$, $\exists i \in I$ astfel încât $x \in C_i$. Restricția funcției f la C_i fiind continuă, iar C_i conexă, rezultă că f este constantă pe C_i . Atunci, deoarece $c \in C_i$, $f(x) = f(c) = 1$, așadar f este constantă pe C și, conform teoremei 3.6.2, obținem C conexă. Cazul $f(c) = 0$ se tratează în mod analog.

Definiția 3.6.1 *O mulțime $I \subset \mathbb{R}$ se numește interval dacă din $a, b \in I$, $a < b$ și $a \leq c \leq b$, rezultă $c \in I$.*

Teorema 3.6.4 *O submulțime $C \subseteq \mathbb{R}$ este conexă dacă și numai dacă C este un interval.*

DEMONSTRAȚIE: \Rightarrow Fie C conexă și presupunem că C nu este interval. Atunci, rezultă că există numerele a, b, c astfel încât $a < c < b$, $a, b \in C$ și $c \notin C$. Luând $D_1 = C \cap (-\infty, c) \neq \emptyset$ și $D_2 = C \cap (c, \infty) \neq \emptyset$ se verifică condiția (3.3) și rezultă că C este neconexă, ceea ce este absurd. Așadar C este un interval.

\Leftarrow Fie C un interval și presupunem că este neconex. Conform teoremei 3.6.2 rezultă că există o funcție $f : C \rightarrow \{0, 1\}$ continuă și neconstantă. Atunci din teorema Darboux-Bolzano funcția f ar trebui să ia valoarea $\frac{1}{2}$, ceea ce este fals, deoarece f ia numai valorile 0 și 1.

Corolarul 3.6.1 *Dacă $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, $C \subseteq X$ conex, pentru care există $a, b \in C$ astfel ca $f(a) < 0$ și $f(b) > 0$, atunci există $c \in C$ astfel încât $f(c) = 0$.*

DEMONSTRAȚIE: Conform teoremei 3.6.1 rezultă că $f(C)$ este o submulțime conexă a lui \mathbb{R} , adică un interval. Atunci, pentru că $0 \in [f(a), f(b)] \subseteq f(C)$, există $c \in C$ astfel încât $f(c) = 0$.

Observația 3.6.1 1. *Proprietatea din corolarul 3.6.1 se numește proprietatea lui Darboux. Această proprietate nu o au numai funcțiile continue.*

2. *Orice mulțime convexă din \mathbb{R}^n este conexă.*

3. *Orice interval din \mathbb{R}^n este conex.*

Definiția 3.6.2 O mulțime deschisă și conexă într-un spațiu metric se numește domeniu.

Definiția 3.6.3 Fie $a, b \in \mathbb{R}^n$. Se numește linie poligonală ce unește punctele a, b o submulțime $L \subset \mathbb{R}^n$ astfel încât să existe punctele $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ și $L_{ab} = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{m-1}, x_m] \cup [x_m, b]$.

Observația 3.6.2 1. Intervalul $[a, b]$ în \mathbb{R}^n se definește ca fiind

$$[a, b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}.$$

2. Intervalul $[a, b]$ din \mathbb{R}^n este conex, deoarece $[a, b] = f([0, 1])$, $f(t) = (1-t)a + tb$, $\forall t \in [0, 1]$, iar funcția f este continuă pe mulțimea conexă $[0, 1]$.

Caracterizarea mulțimilor conexe în \mathbb{R}^n

Teorema 3.6.5 Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, nevidă din \mathbb{R}^n , $n \geq 1$. Sunt echivalente condițiile:

1. D este domeniu în \mathbb{R}^n ;
2. Orice două puncte din D pot fi numite printr-o linie poligonală conținută în D .

DEMONSTRAȚIE: $1 \Rightarrow 2$ Fie $a, b \in D$ două puncte fixate. Notăm $D_1 = \{x \in D \mid \text{există o linie poligonală în } D, \text{ care unește punctele } a \text{ și } x\} = \{x \in D \mid \exists L_{ax} \subset D\}$ și $D_2 = D - D_1$; D_1 și D_2 mulțimi deschise. Dacă $D_2 \neq \emptyset$, atunci D este neconexă, ceea ce contrazice ipoteza. Prin urmare $D_1 = D$ și $b \in D_1$, adică $\exists L_{ab} \subset D$.

$2 \Rightarrow 1$ Fie $a \in D$ un punct fixat. Pentru orice punct $b \in D$ există o linie poligonală $L_{ab} \subset D$ și care, conform teoremei 3.6.3, este mulțime conexă. Mulțimea $D = \cup_{b \in D} L_{ab}$ este conexă, deoarece L_{ab} sunt conexe și $\cap_{b \in D} L_{ab} = \{a\}$.

3.7 Funcții uniform continue

Fie (X, d) și (Y, d') două spații metrice, $\emptyset \neq A \subset X$.

Definiția 3.7.1 O funcție $f : A \rightarrow Y$ se numește uniform continuă pe mulțimea A dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x, y \in A$ cu $d(x, y) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Observația 3.7.1 1. Continuitatea uniformă este o proprietate globală a funcțiilor, în timp ce continuitatea este o proprietate punctuală.

2. Orice funcție f uniform continuă pe A este continuă pe A . Într-adevăr, din definiția 3.7.1 pentru $a = x' \in A$ fixat se obține f continuă în a și, cum $a \in A$ a fost ales arbitrar, rezultă f continuă pe A . Reciproca este, în general, falsă.

3. În continuitatea punctuală δ depinde, în general, de ε și de punct, pe când în continuitatea uniformă δ depinde doar de ε .

Exemplu 3.7.1 1. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x$ este uniform continuă pe \mathbb{R} , deoarece $\forall \varepsilon > 0$ punând $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ obținem

$$\forall x, x' \in \mathbb{R} \text{ cu } |x - x'| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x')| = |x - x'| < \varepsilon.$$

2. Funcția $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$ nu este uniform continuă pe $(0, 1)$. Presupunem f uniform continuă pe $(0, 1)$; atunci pentru $\varepsilon = \frac{1}{3}$ există $\delta > 0$ astfel încât $\forall x, x' \in (0, 1)$ cu $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{1}{3}$. Fie $x = \frac{1}{n+1}$, $x' = \frac{1}{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{2}{n+1} < \delta$. Atunci

$$|x - x'| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right| < \frac{2}{n+1} < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| = |n+1 - (n+2)| = 1 < \frac{1}{3},$$

fals.

3. Funcția $f : (1, 2) \times (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x}{y}$ este uniform continuă. Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ și $x, x', y, y' \in (1, 2)$ astfel ca $|x - x'| < \delta$, $|y - y'| < \delta$, unde $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{4}$;

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x', y')| &= \left| \frac{x}{y} - \frac{x'}{y'} \right| = \frac{|xy' - x'y|}{yy'} = \frac{|xy' - x'y' + x'y' - x'y|}{yy'} \leq \\ &\leq \frac{y'|x - x'| + x'|y' - y|}{yy'} < \delta \frac{x' + y'}{yy'} < 4\delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Teorema 3.7.1 Heine (1821 - 1881)

Orice funcție $f : A \rightarrow Y$ continuă pe un compact A este uniform continuă pe acel compact.

DEMONSTRAȚIE: Presupunem că f nu este uniform continuă. Atunci $\exists \varepsilon > 0$ astfel încât $\forall \delta > 0$, există $x, x' \in A$ cu $d(x, x') < \delta$ pentru care $d'(f(x), f(x')) \geq \varepsilon$. Luăm $\delta = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Există șirurile $(x_n), (x'_n) \subset A$ cu $d(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$ astfel ca $d'(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$. $A \subset X$ compactă \Rightarrow șirul $(x_n) \subset A$ conține un subșir convergent în A , deci există $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ funcție strict crescătoare și $a \in A$ astfel ca $x_{h(n)} \rightarrow a$ pe X .

Cum $d(x_n, x'_n) < \frac{1}{n} \Rightarrow x'_{h(n)} \rightarrow a$ pe X , iar din continuitatea funcției $f \Rightarrow f(x_{h(n)}) \rightarrow f(a)$ pe Y și $f(x'_{h(n)}) \rightarrow f(a)$ pe Y , adică $d(f(x_{h(n)}), f(x'_{h(n)})) \rightarrow 0$, ceea ce contrazice faptul că $d(f(x_{h(n)}), f(x'_{h(n)})) \geq \varepsilon$, $\forall n \geq 1$. Rezultă f uniform continuă.

Exemplu 3.7.2 1. Funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

este uniform continuă pe $[0, 1]$, deoarece este continuă pe compactul $[0, 1]$.

2. Funcția $f : [1, 2] \times [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = \frac{x}{y}$ este uniform continuă, deoarece este continuă iar $[1, 2] \times [1, 2]$ este compact.

Observația 3.7.2 Dacă $f : X \rightarrow X$, atunci au loc următoarele implicații f contracție $\Rightarrow f$ uniform continuă $\Rightarrow f$ continuă.

3.8 Aplicații liniare și continue

Fie E și F spații vectoriale normate, reale.

Definiția 3.8.1 Funcția $f : E \rightarrow F$ se numește aplicație liniară sau operator liniar dacă:

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in E$;
2. $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, $\forall x \in E$ și $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Exemplu 3.8.1 1. $E = F = \mathbb{R}$.

Dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o aplicație liniară, atunci $f(x) = f(x1) = xf(1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deoarece mulțimea $\{1\}$ este bază în \mathbb{R} . Notând $f(1) = a \in \mathbb{R}$ găsim că toate aplicațiile liniare de la \mathbb{R} la \mathbb{R} sunt de forma $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$.

Considerăm în \mathbb{R}^n baza canonică $\{e_1, \dots, e_n\}$, iar în \mathbb{R} baza $\{1\}$, unde $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, $\forall i = \overline{1, n}$. Orice $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ se scrie sub forma $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$.

Dacă $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este aplicație liniară de la \mathbb{R}^n la \mathbb{R} , atunci

$$f(x) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \dots + x_nf(e_n).$$

Notând $f(e_i) = a_i \in \mathbb{R}$ obținem că toate aplicațiile liniare de la \mathbb{R}^n la \mathbb{R} sunt de forma $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = (a, x)$, unde $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

3. $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}^m$.

Dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ este aplicație liniară de la \mathbb{R} la \mathbb{R}^m , atunci pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$f(x) = f(x1) = xf(1) = x(a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_me_m) = x(a_1, a_2, \dots, a_m),$$

unde $f(1) \in \mathbb{R}^m$, $f(1) = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, iar $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ este baza canonică din \mathbb{R}^m .

Observăm că $f(x) = (xa_1, \dots, xa_m) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$ unde $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt aplicații liniare.

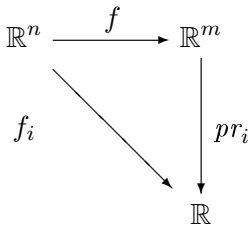
4. $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$.

Fie $\{e_1, \dots, e_n\}$, respectiv $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ bazele canonice din \mathbb{R}^n , respectiv \mathbb{R}^m . Dacă $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ este aplicație liniară între spațiile \mathbb{R}^n și \mathbb{R}^m , atunci $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $x = (x_1, \dots, x_n)$ avem

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f(e_j).$$

Cum $f(e_j) \in \mathbb{R}^m$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} e'_i$, deci

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} e'_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) e'_i = \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \right) = \\ &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)), \end{aligned}$$



unde $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i(x) = (b_i, x)$, $b_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i = \overline{1, m}$ sunt aplicații liniare.

Matricea $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$ este matricea asociată aplicației liniare f în bazele canonice din \mathbb{R}^n și \mathbb{R}^m .

Observația 3.8.1 1. Dacă $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ și $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ sunt aplicații liniare ce au matricele A , respectiv B relative la bazele canonice ale spațiilor respective, atunci operatorul $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ are matricea BA .

2. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ este aplicație liniară \Leftrightarrow cele m componente $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sunt aplicații liniare.

Definiția 3.8.2 Aplicația liniară $f : E \rightarrow F$ este mărginită dacă $\exists m > 0$ astfel încât $\|f(x)\| \leq m\|x\|$, $\forall x \in E$.

Observația 3.8.2 În definiția 3.8.2 $\|f(x)\|$ reprezintă norma în spațiul F , iar $\|x\|$ reprezintă norma în spațiul E .

Teorema 3.8.1 Fie $f : E \rightarrow F$ o aplicație liniară. Sunt echivalente următoarele afirmații:

1. Aplicație f este continuă pe E .
2. Aplicația f este continuă în 0_E .
3. Aplicația f este mărginită.

DEMONSTRAȚIE: $1 \Rightarrow 2$ evident;

$2 \Rightarrow 1$. Fie $x_0 \in E$ și $x_n \rightarrow x_0$. Atunci $x_n - x_0 \rightarrow 0_E$ și, conform ipotezei, $f(x_n - x_0) \rightarrow f(0_E) = 0_F$, de unde $f(x_n) - f(x_0) \rightarrow 0_F$. Deci $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$, adică f este continuă în punctul x_0 . Cum $x_0 \in E$ a fost ales arbitrar, rezultă că aplicația liniară f este continuă pe E .

$2 \Rightarrow 3$. Presupunem f continuă în 0_E , deci $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x \in E$ cu $\|x\| < \delta(\varepsilon)$ avem $\|f(x)\| < \varepsilon$. Alegem $\varepsilon = 1$; atunci

$$\exists \delta_1 > 0 \text{ astfel încât dacă } \|x\| < \delta_1, x \in E \text{ avem } \|f(x)\| < 1. \quad (3.7)$$

Fie $y \in E, y \neq 0_E \Rightarrow \|y\| > 0$. Notăm $y_1 = \frac{\delta_1}{2\|y\|}y$; $\|y_1\| = \frac{\delta_1\|y\|}{2\|y\|} = \frac{\delta_1}{2} < \delta_1$ și, conform (3.7), va rezulta $\|f(y_1)\| < 1$. Dar

$$\begin{aligned} \|f(y_1)\| &= \left\| f\left(\frac{\delta_1 y}{2\|y\|}\right) \right\| = \left\| \frac{\delta_1}{2\|y\|} f(y) \right\| = \\ &= \frac{\delta_1}{2\|y\|} \|f(y)\| < 1 \Rightarrow \|f(y)\| < \frac{2}{\delta_1} \|y\|. \end{aligned}$$

Dacă $y = 0_E$, atunci $f(0_E) = 0_F$ și $\|0_E\| = 0$. Așadar, aplicația liniară f este mărginită.

$3 \Rightarrow 2$. Fie $x_n \rightarrow 0_E$ și presupunem că f este mărginită, deci $\exists m > 0$ astfel încât $\forall x \in E$ avem $\|f(x)\| \leq m\|x\|$. Atunci $0 < \|f(x_n)\| \leq m\|x_n\|$ și trecând la limită avem $\|f(x_n)\| \rightarrow 0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow 0_F = f(0_E)$, adică f este continuă în 0_E .

Fie E și F spații vectoriale normate. Notăm $\mathcal{L}_C(E, F) = \{f \in \mathcal{L}(E, F) \mid f \text{ este continuă pe } E\}$ spațiul aplicațiilor liniare și continue de la E la F .

Teorema 3.8.2 $\mathcal{L}_C(E, F)$ este spațiu vectorial normat.

DEMONSTRAȚIE: Se verifică ușor că $\mathcal{L}_C(E, F)$ este un spațiu vectorial.

Fie $f \in \mathcal{L}_C(E, F)$, adică f este o aplicație liniară și continuă între spațiile vectoriale normate E și F și notăm

$$m_1 = \sup \{\|f(x)\| \mid \|x\| = 1\} = \|f\|_1$$

$$m_2 = \sup \left\{ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \mid x \neq 0_E \right\} = \|f\|_2$$

$$m_3 = \sup \{\|f(x)\| \mid \|x\| \leq 1\} = \|f\|_3$$

$$\{\|f(x)\| \mid \|x\| = 1\} = \left\{ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \mid \|x\| = 1 \right\} \subseteq \left\{ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \mid x \neq 0_E \right\},$$

astfel

$$m_1 \leq m_2 \quad (3.8)$$

Fie $x \neq 0_E$, $\bar{x} = \frac{x}{\|x\|}$. Cum $\|\bar{x}\| = 1$ rezultă

$$\|f(\bar{x})\| \leq m_1 \quad (3.9)$$

$$\|f(\bar{x})\| = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \left\| \frac{f(x)}{\|x\|} \right\| = \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \quad (3.10)$$

Din (3.9) și (3.10) obținem $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq m_1$, $x \neq 0_E$ de unde $m_1 \geq m_2$ care împreună cu (3.8) ne dă $m_1 = m_2$.

Demonstrăm că $m_1 \leq m_3 \leq m_2$.

$$\{\|f(x)\| \mid \|x\| = 1\} \subseteq \{\|f(x)\| \mid \|x\| \leq 1\} \Rightarrow m_1 \leq m_3.$$

Dacă $0 < \|x\| \leq 1$, atunci $\|f(x)\| \leq \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq m_2$, așadar, $m_3 = \sup\{\|f(x)\| \mid \|x\| \leq 1\} \leq m_2$.

Dacă $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E \Rightarrow \|f(0_E)\| = 0 \leq m_2$ și astfel am arătat că $m_1 \leq m_3 \leq m_2$ și, cum $m_1 = m_2$, obținem $m_1 = m_2 = m_3$.

Arătăm că $f \rightarrow \|f\| = m_1 = m_2 = m_3$ este normă.

1. $\|f\| \geq 0$, $\|f\| = 0 \Rightarrow f(x) = 0_F$. Avem

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0, \quad \forall x \neq 0_E \Rightarrow \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq 0, \quad \forall x \neq 0_E \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|f(x)\| = 0, \quad \forall x \neq 0_E \Rightarrow f(x) = 0_F, \quad \forall x \neq 0_E. \end{aligned}$$

Cum $f(0_E) = 0_F$, rezultă $f(x) = 0_F$, $\forall x \in E$.

$$2. \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad (3.11)$$

$$(3.11) \Leftrightarrow \sup\{\|f(x) + g(x)\| \mid \|x\| = 1\} \leq \sup\{\|f(x)\| + \|g(x)\| \mid \|x\| = 1\} \stackrel{not}{=} m.$$

Avem $\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\|$ și

$$m' \stackrel{not}{=} \sup\{\|f(x)\| \mid \|x\| = 1\}, \quad m'' \stackrel{not}{=} \sup\{\|g(x)\| \mid \|x\| = 1\},$$

și arătăm că $m = m' + m''$.

$$\|f(x)\| \leq m', \quad \|g(x)\| \leq m'', \quad \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq m' + m'', \quad \forall x \in E, \|x\| = 1.$$

Cum m este cel mai mic majorant pentru $\|f(x)\| + \|g(x)\|$, $\|x\| = 1$, rezultă $m \leq m' + m''$.

Fie $\varepsilon > 0$, $m' + m'' - \varepsilon = m' - \frac{\varepsilon}{2} + m'' - \frac{\varepsilon}{2}$;

$$\|f(x)\| > m' - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{și} \quad \|g(x)\| > m'' - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in E, \quad \|x\| = 1,$$

deci $m' + m'' = m$. Prin urmare, $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

$$\begin{aligned} 3. \quad \|\alpha f\| &= \sup\{\|\alpha f(x)\| \mid \|x\| = 1\} = \sup\{|\alpha| \|f(x)\| \mid \|x\| = 1\} = \\ &= |\alpha| \sup\{\|f(x)\| \mid \|x\| = 1\} = |\alpha| \|f\|, \quad \forall \alpha \in K. \end{aligned}$$

Observația 3.8.3 În general $\mathcal{L}_C(E, F) \subseteq \mathcal{L}(E, F)$, dar se verifică ușor că dacă E și F sunt spații vectoriale normate finit dimensionale avem egalitate, adică $\mathcal{L}_C(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$.

Teorema 3.8.3 Dacă F este spațiu Banach, atunci $\mathcal{L}_C(E, F)$ este un spațiu Banach.

DEMONSTRAȚIE: Fie (f_n) un șir fundamental de aplicații liniare și continue. Atunci $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$ și $\forall p \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$ $\|f_{n+p} - f_n\|_3 < \varepsilon$;

$$\|f_{n+p} - f_n\|_3 = \sup\{\|f_{n+p}(x) - f_n(x)\| \mid \|x\| \leq 1\}$$

$$\|f_{n+p}(x) - f_n(x)\| \leq \|f_{n+p} - f_n\|_3 \|x\| < \varepsilon \|x\| \leq \varepsilon,$$

adică șirul (f_n) fundamental în Y și, cum spațiul Y este complet, șirul (f_n) este convergent. Fie $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Pentru orice $x, y \in E$ și $\forall \alpha, \beta \in K$ avem:

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\alpha f_n(x) + \beta f_n(y)] = \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \Rightarrow f \in \mathcal{L}(E, F) \end{aligned}$$

Arătăm că f este mărginită. Șirul (f_n) fiind fundamental, el este mărginit, adică $\exists M > 0$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|f_n\| \leq M$. Din $\|f(x)\| - \|f_n(x)\| \leq \|f(x) - f_n(x)\|$ obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x)\| = \|f(x)\|$. Atunci

$$\|f(x)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_3 \|x\| \leq M \|x\| \leq M,$$

adică aplicația liniară f este mărginită și conform teoremei 3.8.1 ea este continuă pe X . Așadar, $f \in \mathcal{L}_C(E, F)$.

Capitolul 4

Diferențiabilitate

4.1 Funcții diferențiabile

Fie $f : A \rightarrow F$ o funcție definită pe deschisul $A \subseteq E$, unde $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$.

Definiția 4.1.1 *Spunem că funcția f este diferențiabilă în punctul $x_0 \in A$ dacă există o aplicație liniară $l \in \mathcal{L}(E, F)$ astfel încât*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - l(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0_F. \quad (4.1)$$

Funcția f este diferențiabilă pe mulțimea A dacă este diferențiabilă în orice punct $x_0 \in A$.

Observația 4.1.1 1. *Dacă notăm $x - x_0 = h$, atunci funcția f este diferențiabilă în punctul $x_0 \in A$ dacă $\exists l \in \mathcal{L}(E, F)$ astfel încât*

$$\lim_{h \rightarrow 0_E} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - l(h)}{\|h\|} = 0_F.$$

2. *Dacă notăm*

$$\frac{f(x) - f(x_0) - l(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = \alpha(x),$$

atunci funcția f este diferențiabilă în punctul $x_0 \in A$ dacă $f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + \|x - x_0\|\alpha(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0_F$.

Teorema 4.1.1 *Dacă o funcție $f : A \rightarrow F$, $A = \overset{\circ}{A} \subset E$ este diferențiabilă într-un punct $x_0 \in A$, atunci aplicația liniară $l \in \mathcal{L}(E, F)$ din definiția 4.1.1 este unic determinată.*

DEMONSTRAȚIE: Presupunem că există $l_1, l_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ cu

$$\lim_{h \rightarrow 0_E} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - l_i(h)}{\|h\|} = 0_F, \quad i = 1, 2.$$

Definim funcțiile $g_i : E \rightarrow F, i = 1, 2$

$$g_1(h) = \begin{cases} f(x_0 + h) - f(x_0) - l_1(h), & \text{dacă } x_0 + h \in A \\ -l_1(h), & \text{dacă } x_0 + h \notin A \end{cases}, \text{ respectiv}$$

$$g_2(h) = \begin{cases} f(x_0 + h) - f(x_0) - l_2(h), & \text{dacă } x_0 + h \in A \\ -l_2(h), & \text{dacă } x_0 + h \notin A \end{cases},$$

$$g_1(h) - g_2(h) = l_2(h) - l_1(h) \stackrel{\text{not}}{=} l(h), \quad l \in \mathcal{L}(E, F).$$

Avem

$$\lim_{h \rightarrow 0_E} \frac{g_i(h)}{\|h\|} = 0_F \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0_E} \frac{g_1(h) - g_2(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0_E} \frac{l(h)}{\|h\|} = 0_F.$$

Din $\lim_{h \rightarrow 0_E} \frac{l(h)}{\|h\|} = 0_F$ rezultă că $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât dacă $\|h\| < \delta(\varepsilon)$ să avem $\frac{\|l(h)\|}{\|h\|} < \varepsilon$, adică $\|l(h)\| < \varepsilon\|h\|$.

Dacă $\|h\| = 0 \Leftrightarrow h = 0_E \Rightarrow l(h) = 0_F$, deci $\|l(h)\| \leq \varepsilon\|h\|$.

Fie $h_1 \neq 0_E$ și $h_2 = \frac{\delta_1}{\|h_1\|} h_1$, $\delta_1 < \delta(\varepsilon)$;

$$\|h_2\| = \delta_1 \left\| \frac{h_1}{\|h_1\|} \right\| = \delta_1 < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|l(h_2)\| < \varepsilon\|h_2\| \Rightarrow \frac{\|l(h_2)\|}{\|h_2\|} < \varepsilon.$$

Dar

$$\frac{\|l(h_2)\|}{\|h_2\|} = \frac{\left\| l \left(\frac{\delta_1}{\|h_1\|} h_1 \right) \right\|}{\left\| \frac{\delta_1}{\|h_1\|} h_1 \right\|} = \frac{\frac{\delta_1}{\|h_1\|} \|l(h_1)\|}{\frac{\delta_1}{\|h_1\|} \|h_1\|} = \frac{\|l(h_1)\|}{\|h_1\|} < \varepsilon.$$

Deoarece $\|l\| = \sup \left\{ \frac{\|l(h)\|}{\|h\|} \mid h \neq 0_E \right\} \leq \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \|l\| \leq \varepsilon$, de unde rezultă $\|l\| = 0 \Rightarrow l(h) = 0_F, \forall h \in E$ adică $l_1(h) = l_2(h), \forall h \in E$.

Definiția 4.1.2 Dacă funcția $f : A \rightarrow F$, definită pe deschisul $A \subseteq E$, este diferențiabilă într-un punct $x_0 \in A$, atunci aplicația $l \in \mathcal{L}(E, F)$ din definiția 4.1.1 se numește diferențiala lui f în punctul x_0 și se notează $l = df(x_0)$.

Cu această notație relația (4.1) devine

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0_F.$$

Observația 4.1.2 Dacă $f : E \rightarrow F$ este o aplicație liniară, adică $f \in \mathcal{L}(E, F)$, atunci f este diferențiabilă în orice punct $x_0 \in E$ și $df(x_0) = f$. Într-adevăr, avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0_F}{\|x - x_0\|} = 0_F$$

Teorema 4.1.2 Orice funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}$, este diferențiabilă într-un punct $x_0 \in A$ dacă și numai dacă f este derivabilă în x_0 .

DEMONSTRAȚIE: f este diferențiabilă în $x_0 \in A \Leftrightarrow \exists l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - l(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0.$$

Cum $l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \Rightarrow l(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$, unde $a = l(1) \in \mathbb{R}$. Deci f este diferențiabilă în $x_0 \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|} \right| = 0 \Leftrightarrow \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = 0 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a = 0 \Leftrightarrow \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a &\Leftrightarrow f'(x_0) = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f \text{ este derivabilă în } x_0. \end{aligned}$$

În plus, avem $df(x_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h \quad (4.2)$$

Observația 4.1.3 $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $1_{\mathbb{R}}(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ este diferențiabilă în orice punct $x_0 \in \mathbb{R}$ și $d1_{\mathbb{R}}(x_0)(h) = h = 1h = 1_{\mathbb{R}}(h)$; astfel (4.2) devine

$$\begin{aligned} df(x_0)(h) &= f'(x_0)h = f'(x_0)d1_{\mathbb{R}}(x_0)(h), \forall h \in \mathbb{R} \Rightarrow df(x_0) = f'(x_0)d1_{\mathbb{R}}(x_0) = \\ &= f'(x_0)d1_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Notând $d1_{\mathbb{R}} = dx$, obținem $df(x_0) = f'(x_0)dx$ deci $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$.

Teorema 4.1.3 Fie $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție definită pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ și $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, unde $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1, m}$. Funcția f este diferențiabilă în punctul x_0 dacă și numai dacă funcțiile f_i , $i = \overline{1, m}$ sunt diferențiabile în x_0 și, în plus, avem

$$df(x_0) = (df_1(x_0), df_2(x_0), \dots, df_m(x_0)).$$

DEMONSTRAȚIE: f diferențiabilă în $x_0 \Leftrightarrow \exists l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ astfel încât $f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + \|x - x_0\|\alpha(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0_{\mathbb{R}^m}$. Deoarece $f = (f_1, \dots, f_m)$, $l = (l_1, l_2, \dots, l_m)$, $l_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_i(x) = 0$, $i = \overline{1, m}$, avem

$$\begin{aligned} (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) &= (f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_m(x_0)) + \\ &+ (l_1(x - x_0), l_2(x - x_0), \dots, l_m(x - x_0)) + \\ &+ \|x - x_0\|(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_m(x)) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$f_i(x) = f_i(x_0) + l_i(x - x_0) + \|x - x_0\|\alpha_i(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_i(x) = 0, \quad \forall i = \overline{1, m}.$$

$\Leftrightarrow f_i$ sunt diferențiabile în x_0 , $\forall i = \overline{1, m}$ și $df(x_0) = (df_1(x_0), df_2(x_0), \dots, df_m(x_0))$.

Așadar, este suficient în continuare să studiem diverse proprietăți ale funcțiilor diferențiabile în cazul $m = 1$.

4.2 Derivate parțiale

Definiția 4.2.1 Fie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe deschisul $A \subset \mathbb{R}^n$ și $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$. Spunem că funcția f este derivabilă parțial în raport cu variabila x_i în punctul a , dacă există și este finită limita:

$$\lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{x_i - a_i} \quad (4.3)$$

Limita (4.3) se numește derivata parțială a funcției f în raport cu variabila x_i în punctul a și se notează $f'_{x_i}(a)$ sau $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{x_i - a_i} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h}, \end{aligned}$$

unde $h = x_i - a_i$.

Funcția f este derivabilă parțial în raport cu variabila x_i pe A dacă există $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ pentru orice $a \in A$. Funcția f este derivabilă parțial pe A dacă pentru orice $a \in A$ și pentru orice $i = \overline{1, n}$ există $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Pentru cazul $n = 2$, respectiv $n = 3$ vom folosi notațiile $(x_1, x_2) = (x, y)$, $(a_1, a_2) = (x_0, y_0)$ respectiv $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$, $(a_1, a_2, a_3) = (x_0, y_0, z_0)$.

Pentru $n = 2$ funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}$ este derivabilă parțial în raport cu x , respectiv cu y în punctul (x_0, y_0) dacă există limita

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

respectiv

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Exemplu 4.2.1 1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = x^3 y^2 + y$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$;

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x, 1) - f(1, 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(1, y) - f(1, 1)}{y - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2 + y - 2}{y - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} (y + 2) = 3, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^3 y + 1. \end{aligned}$$

2. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p$, $p \geq 1$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = p x_i^{p-1}$, $\forall i = \overline{1, n}$.

Definiția 4.2.2 Fie $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție definită pe deschisul $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ și $a \in A$. Dacă există toate derivatele parțiale $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a)$, unde $k = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$, atunci matricea

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) \right)_{k=\overline{1, m}, i=\overline{1, n}}$$

se numește matricea jacobiană a funcției f în punctul a , sau derivata Fréchet a lui f în punctul a .

Observația 4.2.1

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Dacă $m = n$ determinant funcțional jacobian determinantul matricei $J_F(a)$ se numește jacobianul sau determinantul funcțional al funcțiilor f_1, f_2, \dots, f_n în raport cu variabilele x_1, x_2, \dots, x_n în punctul a și se notează

$$\det J_f(a) = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(a).$$

Definiția 4.2.3 Fie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe deschisul $A \subseteq \mathbb{R}^n$ pentru care există derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \forall i = \overline{1, n}$ într-un punct $a \in A$. Vectorul

$$\text{grad } f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) = \nabla f(a)$$

se numește gradientul funcției f în punctul a (∇ este operatorul lui Hamilton).

Exemplu 4.2.2 1. $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(r, t) = (r \cos t, r \sin t)$

$$J_f(r, t) = \begin{pmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \det J_f(r, t) = r.$$

2. $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ $f(r, \theta, \varphi) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$

$$J_f(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

și $\det J_f(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta$.

3. Gradientul funcției $f : \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ este

$$\text{grad } f(x, y, z) = \frac{x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Teorema 4.2.1 Dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție definită pe deschisul $A \subset \mathbb{R}^n$, diferențiabilă în punctul $a \in A$, atunci f este continuă și există derivatele parțiale în punctul a , $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \forall i = \overline{1, n}$.

DEMONSTRAȚIE: Deoarece funcția f este diferențiabilă în punctul $a \in A$ avem

$$f(x) = f(a) + df(a)(x - a) + \|x - a\|\alpha(x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0. \quad (4.4)$$

Trecând la limită în relația (4.4) obținem

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(a) + df(a)(x - a) + \|x - a\|\alpha(x)) = f(a),$$

deci f este continuă în punctul $x = a$.

Arătăm pentru ușurința scrierii în cazul $n = 2$ (deoarece demonstrația pe cazul general se face în mod analog).

f este diferențiabilă în punctul $(x_0, y_0) \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

Așadar, $\exists a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0,$$

respectiv

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0) - b(y - y_0)}{|y - y_0|} = 0,$$

adică

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} &= a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ și} \\ \exists \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} &= b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

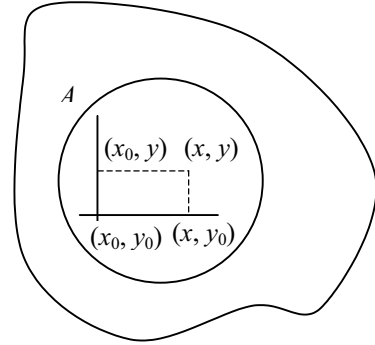


Figura 4.1:

Formula de calcul a diferențialei

Fie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n$ o funcție diferențiabilă în punctul $a \in A$ și $pr_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $pr_1(x, y) = x$, $pr_2(x, y) = y$ proiecțiile liniare, $pr_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

$$dpr_1(x_0, y_0)(x, y) = 1x + 0 = x = pr_1(x, y)$$

$$dpr_2(x_0, y_0)(x, y) = 0 + 1y = y = pr_2(x, y)$$

$$df(x_0, y_0)(x, y) = f'_x(x_0, y_0)dpr_1(x_0, y_0)(x, y) + f'_y(x_0, y_0)dpr_2(x_0, y_0)(x, y)$$

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dpr_1(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)dpr_2(x_0, y_0) \Rightarrow$$

$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dpr_1 + f'_y(x_0, y_0)dpr_2$. Notăm $dpr_1 = dx$ și $dpr_2 = dy$. Cu aceste notații avem $df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$.

În cazul general

$$df(a) = f'_{x_1}(a)dx_1 + f'_{x_2}(a)dx_2 + \cdots + f'_{x_n}(a)dx_n \text{ sau} \quad (4.5)$$

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n$$

unde $dpr_i = dx_i$, $\forall i = \overline{1, n}$; (4.5) reprezintă formula de calcul a diferențialei.

Exemplu 4.2.3 1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = x^3y^2 + y$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 3$, $df(1, 1) = 3dx + 3dy = 3(dx + dy)$, iar într-un punct curent (x, y) avem $df(x, y) = 3x^2y^2dx + (2x^3y + 1)dy$.

2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y, z) = xyz$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = yz$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xz$ și $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xy$, $df(x, y, z) = yzdx + xzdy + xydz$.

3. Funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

nu este diferențiabilă în origine, deși are derivate parțiale în origine.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0.$$

Dacă f ar fi diferențiabilă în origine, atunci ar exista limita

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

dar limita

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

nu există.

Observația 4.2.2 1. Din exemplul 4.2.3 se observă că nu este în general suficient ca o funcție să admită derivate parțiale într-un punct pentru ca să fie diferențiabilă în acel punct.

2. Orice funcție elementară este diferențiabilă pe orice mulțime deschisă din domeniul de definiție. Prin urmare, funcțiile polinomiale, raționale, exponențiale, etc. sunt funcții diferențiabile.

3. Dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n$ deschis, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ și f este diferențiabilă în $x_0 \in A$, atunci matricea diferențialei $df(x_0)$ în bazele canonice este $J_f(x_0)$. Dacă $m = n$, $df(x_0)$ este izomorfism $\Leftrightarrow \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_m)}{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}(x_0) \neq 0$.

Teorema 4.2.2 Dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n$, este o funcție, ce admite derivate parțiale continue într-un punct $a \in A$, atunci f este diferențiabilă în a .

DEMONSTRAȚIE: Pentru simplificare vom considera cazul $n = 2$, $a = (x_0, y_0) \in A$.

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = \\ &= g(x) - g(x_0) + h(y) - h(y_0), \end{aligned}$$

unde $g : [x_0, x] \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = f(x, y)$, iar $h : [y_0, y] \rightarrow \mathbb{R}$ $h(y) = f(x_0, y)$.

$$g'(t) = \lim_{x \rightarrow t} \frac{g(x) - g(t)}{x - t} = \lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x, y) - f(t, y)}{x - t} = f'_x(t, y)$$

$$h'(u) = \lim_{y \rightarrow u} \frac{h(y) - h(u)}{y - u} = \lim_{y \rightarrow u} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, u)}{y - u} = f'_y(x_0, u).$$

Funcțiile g și h sunt funcții Rolle pe intervalele $[x_0, x]$ respectiv $[y_0, y]$. Aplicăm teorema creșterilor finite acestor funcții. Există $\xi \in (x_0, x)$ și $\eta \in (y_0, y)$ astfel încât:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = g'(\xi)(x - x_0) + h'(\eta)(y - y_0) = f'_x(\xi, y)(x - x_0) + f'_y(x_0, \eta)(y - y_0).$$

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} [f'_x(\xi, y)(x - x_0) + f'_y(x_0, \eta)(y - y_0) - \\ & - f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)] = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{(f'_x(\xi, y) - f'_x(x_0, y_0))(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} + \frac{(f'_y(x_0, \eta) - f'_y(x_0, y_0))(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}, \\ 0 &\leq \left| \frac{(f'_x(\xi, y) - f'_x(x_0, y_0))(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} + \frac{(f'_y(x_0, \eta) - f'_y(x_0, y_0))(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \right| \leq \\ &\leq |f'_x(\xi, y) - f'_x(x_0, y_0)| \frac{|x - x_0|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} + |f'_y(x_0, \eta) - f'_y(x_0, y_0)| \\ &\quad \frac{|y - y_0|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \leq |f'_x(\xi, y) - f'_x(x_0, y_0)| + |f'_y(x_0, \eta) - f'_y(x_0, y_0)|, \end{aligned}$$

deoarece

$$\frac{|x - x_0|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}, \quad \frac{|y - y_0|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \leq 1.$$

Când $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ atunci $(\xi, \eta) \rightarrow (x_0, y_0)$. Cum derivatele parțiale sunt funcții continue în (x_0, y_0) ,

$$\lim_{(\xi,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f'_x(\xi, y) = f'_x(x_0, y_0) \quad , \quad \text{respectiv} \quad \lim_{\eta \rightarrow y_0} f'_y(x_0, \eta) = f'_y(x_0, y_0).$$

Obținem

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0,$$

adică funcția f este derivabilă în punctul (x_0, y_0) .

Corolarul 4.2.1 *Orice funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definită pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$, ce admite derivate parțiale continue pe A , este diferențiabilă pe A .*

Observația 4.2.3 *Notăm $C^0(A)$ mulțimea funcțiilor continue definite pe deschisul $A \subset \mathbb{R}^n$ și cu $C^1(A)$ mulțimea funcțiilor continue cu derivate parțiale continue pe deschisul $A \subset \mathbb{R}^n$.*

Cu aceste notații corolarul 4.2.1 se enunță astfel: orice funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(A)$ este diferențiabilă pe A .

4.3 Derivata după o direcție

Fie o funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definită pe un deschis $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ un versor ($\|v\| = 1$) și $x_0 \in A$. Dacă f este diferențiabilă în punctul x_0 , atunci ne vom apropia de x_0 prin puncte de forma $x = x_0 + tv$, unde $t \in \mathbb{R}$. Deoarece A este un deschis, există $S(x_0, r) \subset A$ astfel încât $\forall t \in (-r, r)$ $x_0 + tv \in A$. Într-adevăr, $d(x_0 + tv, x_0) = \|x_0 + tv - x_0\| = \|tv\| = |t|\|v\| = |t| < r$, de unde $x_0 + tv \in S(x_0, r) \subset A$.

Atunci

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - tdf(x_0)(v)}{|t|} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} &= df(x_0)(v) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Definiția 4.3.1 Dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție definită pe deschisul $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ și $v \in \mathbb{R}^n$ un versor, atunci limita $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$, ce reprezintă viteza de variație a funcției f în punctul x_0 după versorul v , se numește derivata funcției f în punctul x_0 după versorul v și se notează $\frac{df}{dv}(x_0)$.

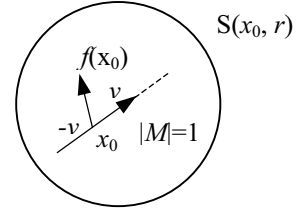


Figura 4.2:

Dacă notăm $x = x_0 + tv$ avem

$$\begin{aligned} \frac{df}{dv}(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{t} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{t} \\ \frac{df}{d(-v)}(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - tv) - f(x_0)}{t} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + uv) - f(x_0)}{-u} = -\frac{df}{dv}(x_0). \end{aligned}$$

Teorema 4.3.1 Dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n$, este o funcție diferențiabilă într-un punct $x_0 \in A$, atunci pentru orice versor $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ avem

$$\begin{aligned} \frac{df}{dv}(x_0) &= v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) + \dots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = \\ &= (v, \nabla f(x_0)) = \|\nabla f(x_0)\| \cos(\nabla f(x_0), v) \end{aligned} \quad (4.7)$$

DEMONSTRAȚIE: Din (4.6) avem

$$\begin{aligned} \frac{df}{dv}(x_0) &= df(x_0)(v) = df(x_0)(v_1, v_2, \dots, v_n) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)v_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)v_n = \\ &= (v, \nabla f(x_0)) = \|\nabla f(x_0)\| \|v\| \cos(\nabla f(x_0), v) = \\ &= \|\nabla f(x_0)\| \cos(\nabla f(x_0), v). \end{aligned}$$

Observația 4.3.1 Dacă luăm versorii v care fac cu gradientul un unghi mai mic, respectiv mai mare decât 90° , atunci aceștia sunt vectorii de creștere, respectiv de descreștere. $\frac{df}{dv}(x_0)$ este maxim când $\nabla f(x_0) = v$, adică $\cos(\nabla f(x_0), v)$ are valoarea maximă 1.

Exemplu 4.3.1 Să se calculeze derivata funcției $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ în punctul $A(2, 1, 3)$ după direcția \overrightarrow{AB} , unde $B(5, 5, 15)$.

Versorul direcției \overrightarrow{AB} este $v = \left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right)$. Avem

$$\begin{aligned} f'_x(x, y, z) &= y + z, & f'_x(2, 1, 3) &= 4 \\ f'_y(x, y, z) &= x + z, & f'_y(2, 1, 3) &= 5 \\ f'_z(x, y, z) &= x + y, & f'_z(2, 1, 3) &= 3. \end{aligned}$$

După formula (4.7) obținem $\frac{df}{dv}(2, 1, 3) = 4\frac{3}{13} + 5\frac{4}{13} + 3\frac{12}{13} = \frac{68}{13}$.

4.4 Proprietăți ale funcțiilor diferențiabile și ale derivatelor parțiale

Teorema 4.4.1 Dacă $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n$ sunt două funcții diferențiabile într-un punct $x_0 \in A$, atunci $f + g$, λf , unde $\lambda \in \mathbb{R}$, fg și f/g (dacă $g(x_0) \neq 0$) sunt diferențiabile în x_0 și avem:

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0), \quad \frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i}(x_0) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0),$$

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)g(x_0) + f(x_0)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0),$$

$$\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)g(x_0) - \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0)f(x_0)}{[g(x_0)]^2},$$

$$\nabla(f+g)(x_0) = \nabla f(x_0) + \nabla g(x_0), \quad \nabla(\lambda f)(x_0) = \lambda \nabla f(x_0),$$

$$\nabla(fg)(x_0) = \nabla f(x_0)g(x_0) + \nabla g(x_0)f(x_0),$$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{\nabla f(x_0)g(x_0) - \nabla g(x_0)f(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Dacă $v \in \mathbb{R}^n$ este versor, atunci

$$\frac{d(f+g)}{dv}(x_0) = \frac{df}{dv}(x_0) + \frac{dg}{dv}(x_0), \quad \frac{d(\lambda f)}{dv}(x_0) = \lambda \frac{df}{dv}(x_0),$$

$$\frac{d(fg)}{dv}(x_0) = \frac{df}{dv}(x_0)g(x_0) + \frac{dg}{dv}(x_0)f(x_0),$$

$$\frac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{dv}(x_0) = \frac{\frac{df}{dv}(x_0)g(x_0) - \frac{dg}{dv}(x_0)f(x_0)}{[g(x_0)]^2},$$

$$d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0), \quad d(\lambda f)(x_0) = \lambda df(x_0),$$

$$d(fg)(x_0) = df(x_0)g(x_0) + dg(x_0)f(x_0),$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df(x_0)g(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

DEMONSTRAȚIE: Cum pentru derivatele parțiale $\frac{\partial}{\partial x_i}$, funcțiile $f+g$, λf , fg , f/g sunt considerate funcții de o variabilă reală x_i , restul variabilelor fiind constante, folosim regulile cunoscute din liceu pentru funcțiile de o variabilă. Pentru derivata după o direcție respectiv diferențiala folosim regulile de calcul (4.5) și (4.7).

4.5 Diferențiabilitatea funcțiilor compuse

Teorema 4.5.1 Fie $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}^p$ două funcții definite pe deschiși $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$. Dacă funcția f este diferențiabilă în $a \in A$, iar funcția g este diferențiabilă în $b = f(a)$, atunci funcția h este diferențiabilă în a și $dh(a) = dg(b) \circ df(a)$, unde $h : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ $h = g \circ f$.

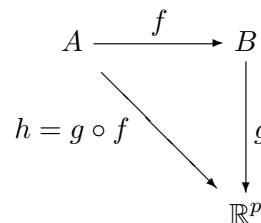


Figura 4.3:

DEMONSTRAȚIE: f diferențiabilă în $a \Rightarrow \exists T = df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

astfel încât $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0_{\mathbb{R}^m}$, $x \in A$.

g diferențiabilă în $b = f(a) \Rightarrow \exists U = dg(b) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ astfel încât $\lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b) - U(y-b)}{\|y-b\|} = 0_{\mathbb{R}^p}$, $y \in B$.

Notăm

$$\frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = \varphi(x),$$

respectiv

$$\frac{g(y) - g(b) - U(y-b)}{\|y-b\|} = \Psi(y) \quad \text{și avem:}$$

$$f(x) = f(a) + T(x-a) + \|x-a\|\varphi(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0_{\mathbb{R}^m} \quad (4.8)$$

$$g(y) = g(b) + U(y-b) + \|y-b\|\Psi(y), \quad \lim_{y \rightarrow b} \Psi(y) = 0_{\mathbb{R}^p}. \quad (4.9)$$

Înlocuind în (4.9) $y = f(x)$ și $b = f(a)$ rezultă:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + U(f(x) - f(a)) + \|f(x) - f(a)\|\Psi(f(x)), \quad \text{de unde} \\ h(x) &= h(a) + U(f(x) - f(a)) + \|f(x) - f(a)\|\Psi(f(x)). \end{aligned}$$

Din (4.8) avem $f(x) - f(a) = T(x-a) + \|x-a\|\varphi(x)$. Atunci

$$\begin{aligned} h(x) &= h(a) + U(T(x-a) + \|x-a\|\varphi(x)) + \|T(x-a) + \|x-a\|\varphi(x)\|\Psi(f(x)), \\ h(x) &= h(a) + (U \circ T)(x-a) + \|x-a\|U(\varphi(x)) + \\ &\quad + \|T(x-a) + \|x-a\|\varphi(x)\|\Psi(f(x)). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Împărțind (4.10) cu $\|x-a\|$ obținem

$$\frac{h(x) - h(a) - (U \circ T)(x-a)}{\|x-a\|} = U(\varphi(x)) + \frac{\|T(x-a) + \|x-a\|\varphi(x)\|\Psi(f(x))}{\|x-a\|}$$

Când $x \rightarrow a$, atunci $\varphi(x) \rightarrow 0_{\mathbb{R}^m}$ și $U(\varphi(x)) \rightarrow U(0_{\mathbb{R}^m}) = 0_{\mathbb{R}^p}$, iar

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a) - (U \circ T)(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x \rightarrow a} U(\varphi(x)) = \lim_{y \rightarrow b} \Psi(y) = 0_{\mathbb{R}^p}.$$

De asemenea,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{\|x - a\|} \|T(x - a) + \|x - a\| \varphi(x)\| \leq \\
&\leq \frac{1}{\|x - a\|} (\|T(x - a)\| + \|x - a\| \|\varphi(x)\|) = \\
&= \frac{1}{\|x - a\|} \|T(x - a)\| + \|\varphi(x)\| \leq \\
&\leq \frac{1}{\|x - a\|} m \|x - a\| + \|\varphi(x)\| = m + \|\varphi(x)\|,
\end{aligned}$$

deoarece $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ și, prin urmare, conform teoremei 3.8.1, $\exists m > 0$ astfel încât $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\|T(x)\| \leq m\|x\|$.

Cum $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, rezultă că pe o vecinătate $V \in \mathcal{V}_a$ a punctului a , $\|\varphi(x)\|$ este mărginită, adică $\exists m_1 > 0$ astfel încât $\|\varphi(x)\| \leq m_1, \forall x \in V$. Astfel, am arătat că factorul

$$\frac{\|T(x - a) + \|x - a\| \varphi(x)\|}{\|x - a\|}$$

este mărginit, așadar

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{\|x - a\|} (\|T(x - a) + \|x - a\| \varphi(x)\|) \Psi(f(x)) + U(\varphi(x)) \right] = 0_{\mathbb{R}^p}.$$

Atunci

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a) - (U \circ T)(x - a)}{\|x - a\|} = 0_{\mathbb{R}^p},$$

adică funcția h este diferențiabilă în punctul a și

$$dh(a) = U \circ T = dg(b) \circ df(a) = dg(f(a)) \circ df(a).$$

Corolarul 4.5.1 Fie $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}^p$ două funcții definite pe deschisii $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$. Dacă funcția f este diferențiabilă pe A și g este diferențiabilă pe $f(A)$, atunci h este diferențiabilă pe A și $\forall a \in A$ $dh(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$, unde $h : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ $h = g \circ f$.

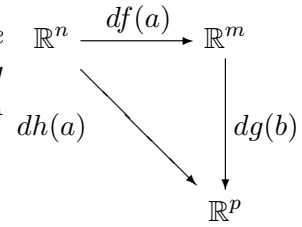


Figura 4.4:

Corolarul 4.5.2 Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, unde $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$, este o funcție diferențiabilă pe $[a, b]$, atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f(b) - f(a) = df(c)(b - a)$

DEMONSTRAȚIE: Pentru $n = 1$ avem $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, diferențiabilă pe $[a, b]$, deci derivabilă pe $[a, b]$. Din teorema lui Lagrange a creșterilor finite pe \mathbb{R} $\exists c \in (a, b)$ astfel încât $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Dar $f'(c)(b - a) = df(c)(b - a)$, deci $f(b) - f(a) = df(c)(b - a)$.

Fie $n > 1$, $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = a + t(b - a), \quad t \in [0, 1]\}$.

Definim funcția $g : [0, 1] \rightarrow [a, b]$, $g(t) = a + t(b - a)$, $\forall t \in [0, 1]$. Dacă $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ și $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$, atunci $g(t) = (a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), \dots, a_n + t(b_n - a_n))$, și $g_i(t) = a_i + t(b_i - a_i)$, $\forall i = \overline{1, n}$. Deoarece funcțiile g_i sunt derivabile pe $[0, 1]$, $i = \overline{1, n}$, deci diferențiabile pe $[0, 1]$, rezultă că funcția g este diferențiabilă pe $[0, 1]$. Din teorema 4.5.1 avem că funcția $h = f \circ g$, $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă pe $[0, 1]$ și, aplicând teorema lui Lagrange a creșterilor finite funcției h pe intervalul $[0, 1]$, obținem că $\exists \mathcal{T} \in (0, 1)$ astfel ca

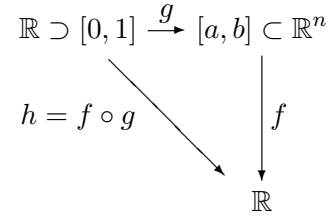


Figura 4.5:

$$h(1) - h(0) = h'(\mathcal{T})(1 - 0) = dh\mathcal{T}(1 - 0), \quad (4.11)$$

și $dh(\mathcal{T}) = df(g(\mathcal{T})) \circ dg(\mathcal{T})$.

$$\begin{aligned} dh(\mathcal{T})(1 - 0) &= (df(g(\mathcal{T})) \circ dg(\mathcal{T}))(1 - 0) = df(g(\mathcal{T}))(dg(\mathcal{T})(1 - 0)), \\ dg(\mathcal{T})(1 - 0) &= (dg_1(\mathcal{T})(1 - 0), \dots, dg_n(\mathcal{T})(1 - 0)) = (g'_1(\mathcal{T})(1 - 0), \dots, \\ &\quad g'_n(\mathcal{T})(1 - 0)) = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n) = b - a, \end{aligned}$$

deci $dh(\mathcal{T})(1 - 0) = df(g(\mathcal{T}))(b - a)$, $g(\mathcal{T}) = c \in (a, b)$, $h(1) = (f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(b)$, $h(0) = (f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(a)$. Înlocuind în (4.11) rezultă $f(b) - f(a) = df(c)(b - a)$, unde $c \in (a, b)$.

Corolarul 4.5.3 Inegalitatea lui Lagrange

Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, unde $[a, b] \subset \mathbb{R}^m$, este o funcție diferențiabilă pe $[a, b]$, atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\| \|b - a\|$.

DEMONSTRAȚIE: Fie funcția $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ $g(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x)(f_i(b) - f_i(a))$, unde $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$. Funcția g îndeplinește ipotezele corolarului 4.5.2, prin urmare $\exists c \in (a, b)$ astfel încât

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b - a) \quad (4.12)$$

Avem

$$g(b) - g(a) = \sum_{i=1}^m [f_i(b) - f_i(a)]^2 = \|f(b) - f(a)\|^2 \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} g'(c)(b - a) &= \sum_{i=1}^m f'_i(c)(f_i(b) - f_i(a))(b - a) \leq \\ &\leq \|f'(c)(b - a)\| \|f(b) - f(a)\| \end{aligned} \quad (4.14)$$

Din relațiile (4.12), (4.13) și (4.14) obținem $\|f(b) - f(a)\|^2 \leq \|f'(c)\| \|b - a\| \|f(b) - f(a)\|$, adică $\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\| \|b - a\|$.

Corolarul 4.5.4 Derivarea funcțiilor compuse

Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}$ intervale deschise $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții. Dacă f este derivabilă în punctul $a \in A$ și g este derivabilă în punctul $b = f(a)$, atunci $h = g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în a și $h'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

DEMONSTRAȚIE: Cum f derivabilă în a , respectiv g derivabilă în $b = f(a)$, rezultă f diferențiabilă în a , respectiv g diferențiabilă în b , iar din teorema 4.5.1 rezultă h diferențiabilă (deci derivabilă) în a și $dh(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$.

Dar, cum $df(a)(x) = f'(a)x$, și $dh(a)(x) = h'(a)x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, obținem

$$dg(f(a)) \circ df(a)(x) = dg(f(a))(df(a)(x)) = dg(f(a))(f'(a)x) = g'(f(a))f'(a)x,$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, adică $h'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Observația 4.5.1 Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $T = (T_1, T_2, \dots, T_m)$, unde $T_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $T_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Considerăm $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, respectiv $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ bazele canonice în spațiile \mathbb{R}^n respectiv \mathbb{R}^m . Pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ avem:

$$\begin{aligned} T(x) &= T(x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n) = x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + \dots + x_nT(e_n), \\ T(e_i) &= (T_1(e_i), T_2(e_i), \dots, T_m(e_i)) = T_1(e_i)f_1 + T_2(e_i)f_2 + \dots + T_m(e_i)f_m. \end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned} T(x) &= x_1(T_1(e_1), \dots, T_m(e_1)) + x_2(T_1(e_2), \dots, T_m(e_2)) + \\ &\quad + x_n(T_1(e_n), \dots, T_m(e_n)) = (x_1T_1(e_1) + x_2T_1(e_2) + \dots + \\ &\quad + x_nT_1(e_n), x_1T_2(e_1) + x_2T_2(e_2) + \dots + \\ &\quad + x_nT_2(e_n), \dots, x_1T_m(e_1) + x_2T_m(e_2) + \dots + x_nT_m(e_n)), \end{aligned}$$

relație care se scrie sub forma matricială

$$\begin{pmatrix} T_1(e_1) & T_1(e_2) & \dots & T_1(e_n) \\ T_2(e_1) & T_2(e_2) & \dots & T_2(e_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_m(e_1) & T_m(e_2) & \dots & T_m(e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \\ \vdots \\ T_m(x) \end{pmatrix}.$$

Matricea $(T_i(e_j))_{i,j}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ se numește matricea asociată aplicației T în bazele canonice din \mathbb{R}^n și \mathbb{R}^m și se notează $M_T = (T_i(e_j))_{i,j}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Dacă $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ și $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$, atunci $M_{U \circ T} = M_U M_T$.

2. Considerăm $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție definită pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in A$ și presupunem că f este diferențiabilă în punctul a . Matricea asociată diferențialei funcției f în punctul a , în bazele canonice din \mathbb{R}^n și \mathbb{R}^m , coincide cu matricea jacobiană a funcției f în punctul a .

$$df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_m), \quad f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

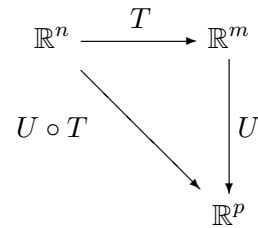


Figura 4.6:

Fie $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ și $y = df(a)(x) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Avem

$$\begin{pmatrix} df_1(a)(x) \\ df_2(a)(x) \\ \vdots \\ df_m(a)(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

deci $J_f(a) = M_{df(a)}$.

Corolarul 4.5.5 Fie $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}^p$ două funcții definite pe deschișii $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$. Dacă funcția f este diferențiabilă în $a \in A$, iar g este diferențiabilă în $b = f(a)$, atunci $g \circ f$ este diferențiabilă în a și

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a))J_f(a) \quad (4.15)$$

Acest corolar este des uzitat în practică în calculul diferențialei funcțiilor compuse.

Cazuri particulare

1. Fie $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții definite pe mulțimile deschise $A \subset \mathbb{R}$ și $B \subset \mathbb{R}^2$, diferențiabile pe A , respectiv B . $f = (u, v)$, $f(x) = (u(x), v(x))$, $h(x) = g(u(x), v(x))$, $\forall x \in A$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ x & \xrightarrow{\quad} & (u, v) \\ & \searrow h = g \circ f & \downarrow g \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

Avem $dh(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$, $J_h(x) = (h'(x))$, $J_g(f(x)) = J_g(u(x), v(x)) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u(x), v(x)) \frac{\partial g}{\partial v}(u(x), v(x)) \right)$, $J_f(x) = \begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix}$, $x \in A$

Aplicând regula de calcul (4.15) obținem

$$(h'(x)) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u(x), v(x)) \frac{\partial g}{\partial v}(u(x), v(x)) \right) \begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix},$$

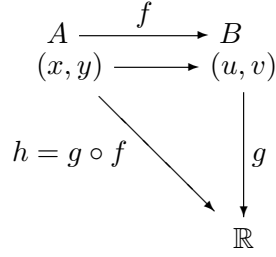
de unde

$$h'(x) = \frac{\partial g}{\partial u}(u(x), v(x))u'(x) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x), v(x))v'(x)$$

sau

$$h' = \frac{\partial g}{\partial u}u' + \frac{\partial g}{\partial v}v'. \quad (4.16)$$

2. Fie $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții definite pe deschișii $A \subset \mathbb{R}^2$ și $B \subset \mathbb{R}^2$, diferențiabile pe A , respectiv B . $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, $h(x, y) = (g \circ f)(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$, $\forall (x, y) \in A$.



Avem

$$dh(x, y) = dg(f(x, y)) \circ df(x, y)$$

sau aplicând (4.15)

$$J_h(x, y) = J_g(f(x, y))J_f(x, y) \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}
 J_h(x, y) &= \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y), \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \right), \\
 J_g(f(x, y)) &= J_g(u(x, y), v(x, y)) = \\
 &= \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial g}{\partial v}(u(x, y), v(x, y)) \right), \\
 J_f(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Astfel relația matricială (4.17) devine:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) & \frac{\partial g}{\partial v}(u(x, y), v(x, y)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix},$$

de unde

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y), \\
 \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y),
 \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\
 \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.
 \end{aligned} \quad (4.18)$$

3. Fie $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ două funcții definite pe deschișii $A \subset \mathbb{R}^3$ și $B \subset \mathbb{R}^2$, diferențiabile pe A , respectiv B .

$$f(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z)), \quad g(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v)),$$

$$\begin{aligned}
h(x, y, z) &= (g \circ f)(x, y, z) = g(u(x, y, z), v(x, y, z)) = (g_1(u(x, y, z), v(x, y, z)), \\
&\quad g_2(u(x, y, z), v(x, y, z)), g_3(u(x, y, z), v(x, y, z))) = \\
&= (h_1(x, y, z), h_2(x, y, z), h_3(x, y, z)) \quad \forall (x, y, z) \in A,
\end{aligned}$$

unde $g_i : B \rightarrow \mathbb{R}$, $h_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ $h_i = g_i(u, v)$, $\forall i = \overline{1, 3}$.

$$\begin{array}{ccc}
(x, y, z) & \xrightarrow{f} & (u, v) \\
A & \searrow & B \\
& h = g \circ f & \downarrow g \\
& & \mathbb{R}
\end{array}$$

Atunci

$$dh(x, y, z) = dg(f(x, y, z))df(x, y, z)$$

sau, aplicând (4.15), $J_h(x, y, z) = J_g(f(x, y, z))J_f(x, y, z)$, adică

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial h_1}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial h_1}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial h_2}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial h_2}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial h_3}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial h_3}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial h_3}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u}(u(x, y, z), v(x, y, z)) & \frac{\partial g_1}{\partial v}(u(x, y, z), v(x, y, z)) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(u(x, y, z), v(x, y, z)) & \frac{\partial g_2}{\partial v}(u(x, y, z), v(x, y, z)) \\ \frac{\partial g_3}{\partial u}(u(x, y, z), v(x, y, z)) & \frac{\partial g_3}{\partial v}(u(x, y, z), v(x, y, z)) \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial v}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix}, \quad \text{de unde} \\
&\frac{\partial h_i}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial g_i}{\partial u}(u(x, y, z), v(x, y, z)) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) + \\
&\quad + \frac{\partial g_i}{\partial v}(u(x, y, z), v(x, y, z)) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y, z) \\
&\frac{\partial h_i}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial g_i}{\partial u}(u(x, y, z), v(x, y, z)) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) + \\
&\quad + \frac{\partial g_i}{\partial v}(u(x, y, z), v(x, y, z)) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y, z) \\
&\frac{\partial h_i}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial g_i}{\partial u}(u(x, y, z), v(x, y, z)) \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) + \\
&\quad + \frac{\partial g_i}{\partial v}(u(x, y, z), v(x, y, z)) \frac{\partial v}{\partial z}(x, y, z),
\end{aligned}$$

$i = \overline{1, 3}$ sau

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_i}{\partial x} &= \frac{\partial g_i}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g_i}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} &= \frac{\partial g_i}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g_i}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial h_i}{\partial z} &= \frac{\partial g_i}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial g_i}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad i = \overline{1, 3}.\end{aligned}\tag{4.19}$$

Exemplu 4.5.1 1. Să se calculeze f' dacă $f = f(u, v) = u^v$ și $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Conform regulii de derivare a funcțiilor compuse (4.16) avem

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)u'(x) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)v'(x) = vu^{v-1}u'(x) + u^v \ln u v'(x).$$

2. Să se calculeze f'_x și f'_y pentru funcția $f(u, v) = \ln(u^2 + v)$, unde $u = e^{x+y^2}$ și $v = x^2 + y$.

Conform regulii de derivare a funcțiilor compuse (4.18) avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \\ &= \frac{2u}{u^2 + v} e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2 + v} 2x = \frac{2}{u^2 + v} (ue^{x+y^2} + x) = \frac{2}{u^2 + v} (u^2 + x), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{2u}{u^2 + v} 2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u^2 + v} = \\ &= \frac{1}{u^2 + v} (4uye^{x+y^2} + 1) = \frac{1}{u^2 + v} (4u^2 y + 1).\end{aligned}$$

3. Se dă funcția $f(u, v) = (uv, u + v, \frac{u}{v})$ și $u(x, y, z) = x^2 z \sin y$, $v(x, y, z) = y \cos z + x$, $v \neq 0$, $f = (f_1, f_2, f_3)$. Să se calculeze $\frac{\partial f_i}{\partial x}$, $\frac{\partial f_i}{\partial y}$ și $\frac{\partial f_i}{\partial z}$, $i = \overline{1, 3}$.

Conform regulii de derivare (4.19) avem:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2vxz \sin y + u$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2xz \sin y + 1$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial f_3}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xz \sin y}{v} - \frac{u}{v^2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = vx^2z \cos y + u \cos z$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = x^2z \cos y + \cos z$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial f_3}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{v}x^2z \cos y - \frac{u}{v^2} \cos z$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = vx^2 \sin y - uy \sin z$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = x^2 \sin y - y \sin z$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f_3}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{x^2 \sin y}{v} + \frac{u}{v^2} y \sin z.$$

4.6 Derivate parțiale de ordin superior

Fie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe mulțimea deschisă $A \subset \mathbb{R}^n$. Presupunem că funcția f este derivabilă parțial pe A , adică există aplicațiile $g_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ $g_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $\forall x \in A$, $i = \overline{1, n}$.

Definiția 4.6.1 Fie $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$. Dacă aplicația $g_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ are derivată parțială în punctul a în raport cu variabila x_j , adică există și este finită limita

$$\lim_{x_j \rightarrow a_j} \frac{g_i(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n) - g_i(a_1, a_2, \dots, a_n)}{x_j - a_j}, \quad (4.20)$$

atunci spunem că f este derivabilă parțial de ordinul al doilea în punctul a în raport cu variabilele x_i și x_j . Dacă există și este finită limita (4.20), atunci aceasta se notează cu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ sau $f''_{x_i x_j}(a)$ dacă $i \neq j$, respectiv $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ sau $f''_{x_i^2}(a)$ dacă $i = j$ și se numește derivata parțială de ordinul al doilea mixtă, respectiv nemixtă a funcției f în punctul a în raport cu variabilele x_i și x_j . Dacă există $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ pentru orice $i, j = \overline{1, n}$, atunci f este derivabilă parțială de ordinul al doilea în punctul a . Dacă există $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ pentru orice $a \in A$ și pentru orice $i, j = \overline{1, n}$, atunci f este derivabilă parțial de ordinul al doilea pe A .

Pentru o funcție f derivabilă parțial de ordinul al doilea pe A se obțin următoarele funcții definite pe A :

n derivate parțiale de ordinul întâi $\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \rightarrow \mathbb{R}$,

$n^2 - n$ derivate parțiale de ordinul al doilea mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : A \rightarrow \mathbb{R}, i, j = \overline{1, n}$

$i \neq j$,

n derivate parțiale de ordinul al doilea nemixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} : A \rightarrow \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$.

Derivatele parțiale de ordinul p se obțin prin derivarea parțială a derivatelor parțiale de ordinul $p - 1$ (în mod inductiv).

Definiția 4.6.2 O funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n$ se numește de clasă $C^p(A)$ pe mulțimea $A, f \in C^p(A)$, dacă este de clasă $C^{p-1}(A)$ și derivatele parțiale de ordinul $p - 1$ sunt funcții de clasă $C^1(A)$, adică dacă funcția admite derivate parțiale până la ordinul p pe A și acestea sunt funcții continue pe A .

Dacă $f \in C^p(A), \forall p \in \mathbb{N}$, atunci f este o funcție indefinit derivabilă pe A și notăm $f \in C^\infty(A)$, unde $C^\infty(A) = \bigcap_{p \geq 0} C^p(A)$. Avem $C^\infty(A) \subset \dots \subset C^p(A) \subset C^{p-1}(A) \subset \dots \subset C^1(A) \subset C^0(A)$. Pentru orice $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mulțimea $(C^p(A), +, \cdot)$, unde $+$ respectiv \cdot reprezintă operațiile de adunare, respectiv de înmulțire a funcțiilor reale definite pe A , este un inel comutativ cu unitate.

Exemplu 4.6.1 1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = e^{ax+by}, a, b \in \mathbb{R}$. Atunci $\frac{\partial f}{\partial x} = a e^{ax+by}, \frac{\partial f}{\partial y} = b e^{ax+by}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (b e^{ax+by}) = a b e^{ax+by}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (a e^{ax+by}) = a b e^{ax+by}.$$

Se observă că f admite derivate parțiale de ordinul al doilea pe \mathbb{R}^2 și acestea sunt egale pe \mathbb{R}^2 . De asemenea, se constată că $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Se arată ușor prin inducție că

$$\frac{\partial^p f}{\partial x^\alpha \partial y^{p-\alpha}} = a^\alpha b^{p-\alpha} e^{ax+by}.$$

2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = x|x|y$. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 2|x|y, & \text{dacă } (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0, y \in \mathbb{R} \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x|x|, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \begin{cases} -2y, & \text{dacă } x < 0 \text{ și } y \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \\ \text{nu există}, & \text{dacă } x = 0 \text{ și } y \in \mathbb{R}^* \\ 2y, & \text{dacă } x > 0 \text{ și } y \in \mathbb{R} \end{cases},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2|x|, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ iar } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

dacă $(x, y) \neq (0, 0)$ și $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{-2y(x^2 + y^2) - 2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

dacă $(x, y) \neq (0, 0)$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0$;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x} = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y - 0}{y} = -1, \end{aligned}$$

deci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Se observă că nu întotdeauna derivatele parțiale mixte de ordinul al doilea sunt egale. În continuare vom enunța un criteriu care ne va da condiții suficiente pentru egalitatea derivatelor parțiale mixte de ordinul al doilea.

Teorema 4.6.1 Fie $g : S(0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe un sferoid $S(0, r) \subset \mathbb{R}^2$. Dacă $g \in C^2(S(0, r))$, atunci derivatele mixte de ordinul al doilea în origine sunt egale, adică

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

DEMONSTRAȚIE: Considerăm expresia $E(x, y) = g(x, y) - g(x, 0) - g(0, y) + g(0, 0)$, $\forall (x, y) \in S(0, r)$ și notăm $\varphi(x, y) = g(x, y) - g(x, 0)$, $\forall (x, y) \in S(0, r)$, $\varphi \in C^2(S(0, r))$. Atunci E va fi de forma $E(x, y) = \varphi(x, y) - \varphi(0, y) = h(x) - h(0)$, unde $h(x) = \varphi(x, y)$, $\forall (x, y) \in S(0, r)$, h de două ori derivabilă și $h'(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, y)$. Aplicând teorema lui Lagrange a creșterilor finite funcției h pe intervalul $[0, x]$, obținem că există $\xi \in (0, x)$ astfel încât

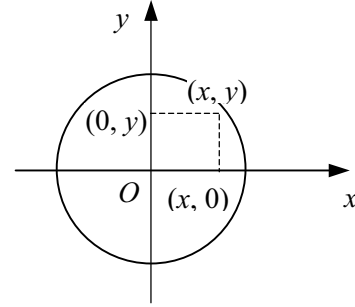


Figura 4.7:

$$E(x, y) = h'(\xi)(x - 0) = h'(\xi)x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi, y)x = \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(\xi, 0) \right] x.$$

Cum $g \in C^2(S(0, r))$, rezultă că $\frac{\partial g}{\partial x} \in C^1(S(0, r))$ și, aplicând în continuare teorema lui Lagrange a creșterilor finite funcției $\frac{\partial g}{\partial x}(\xi, s)$ pe intervalul $[0, y]$, obținem că există $\eta \in (0, y)$ astfel încât

$$E(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(\xi, \eta) \right) x(y - 0) = xy \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \quad (4.21)$$

Acum notăm $\Psi(x, y) = g(x, y) - g(0, y)$, $\forall (x, y) \in S(0, r)$, $\Psi \in C^2(S(0, r))$. Atunci E va fi de forma $E(x, y) = \Psi(x, y) - \Psi(x, 0)$. Repetând raționamentul de mai sus obținem punctele $\bar{\xi} \in (0, x)$ și $\bar{\eta} \in (0, y)$ astfel încât

$$E(x, y) = \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, \bar{\eta})y = \left[\frac{\partial g}{\partial y}(x, \bar{\eta}) - \frac{\partial g}{\partial y}(0, \bar{\eta}) \right] y = xy \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \quad (4.22)$$

Din (4.21) și (4.22) rezultă

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(\xi, \eta), \quad (4.23)$$

cu $\xi, \bar{\xi} \in (0, x)$ și $\eta, \bar{\eta} \in (0, y)$. Când $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ și, cum $\xi, \bar{\xi} \in (0, x)$, $\eta, \bar{\eta} \in (0, y)$, rezultă că $(\xi, \eta), (\bar{\xi}, \bar{\eta}) \rightarrow (0, 0)$ și, deoarece $g \in C^2(S(0, r))$, trecând la limită $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ în relația (4.23), obținem

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Teorema 4.6.2 *Criteriul lui Schwarz (1843 - 1921)*

Dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție definită pe mulțimea deschisă $A \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^2(A)$, atunci derivatele parțiale mixte de ordinul al doilea sunt egale în orice punct din A , adică

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \quad \forall i, j = \overline{1, n} \quad \text{și} \quad \forall a \in A.$$

DEMONSTRAȚIE: Fie $a \in A$; $A \subset \mathbb{R}^n$ fiind o mulțime deschisă există $S(a, r) \subseteq A$, $r > 0$. Fie $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$ și presupunem $i < j$ (analog se tratează cazul $i > j$); $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_i + x, \dots, a_j + y, \dots, a_n)$, $(x, y) \in S(0, r)$.

Definim funcția $g : S(0, r) \rightarrow A$ $g(x, y) = \bar{a} \in S(a, r)$, $\forall (x, y) \in S(0, r)$.

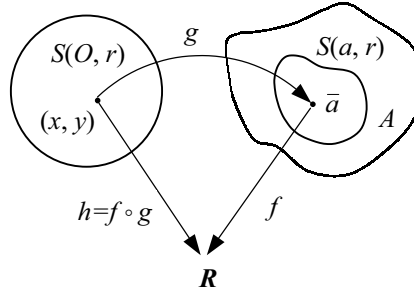


Figura 4.8:

Avem

$$\begin{aligned} d(a, \bar{a}) &= [(a_1 - a_1)^2 + \dots + (a_i + x - a_i)^2 + \dots + (a_j + y - a_j)^2 + \dots + \\ &\quad + (a_n - a_n)^2]^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2} < r, \end{aligned} \quad (4.24)$$

deci funcția g este bine definită. Fie funcția $h : S(0, r) \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(x, y) = (f \circ g)(x, y) = f(g(x, y)) = f(\bar{a}) = f(a_1, a_2, \dots, a_i + x, \dots, a_j + y, \dots, a_n).$$

Cum f, g sunt funcții de clasă C^2 pe domeniile lor de definiție, rezultă că $h \in C^2(S(0, r))$.

Aplicând funcției h teorema 4.6.1 obținem $\frac{\partial h}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial h}{\partial y \partial x}(0, 0)$. Notăm $a_i + x = x_i$ și $a_j + y = x_j$. Atunci

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})x'_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}), \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{a})x'_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{a}),$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{a}) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a})x'_j = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a}),$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{a})x'_i = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{a}).$$

Când $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, $\bar{a} \rightarrow a$ și, cum $h \in C^2(S(0, r))$, rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Deoarece $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, iar $a \in A$ a fost ales arbitrar, avem $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Corolarul 4.6.1 Dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n$ și $f \in C^p(A)$, $p \geq 2$, atunci în calculul $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \partial x_{i_2}^{\alpha_2} \dots \partial x_{i_n}^{\alpha_n}}$ nu contează ordinea de derivare parțială, unde $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, n\}$ și $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \alpha$, $2 \leq \alpha \leq p$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

Definiția 4.6.3 Fie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe mulțimea deschisă A , $f \in C^2(A)$, $a \in A$. Forma pătratică $d^2 f(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$d^2 f(a)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) x_i x_j$$

se numește diferențiala de ordinul al doilea a funcției f în punctul a .

Observația 4.6.1 1. Pentru $n = 2$ avem

$$d^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) dy^2;$$

2. $d(dx) = d(dy) = 0$;

3. Dacă introducem operatorul de diferențiere

$$d = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \quad \text{avem}$$

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f \quad \text{și} \quad d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f,$$

unde exponentul 2 înseamnă că se dezvoltă formal suma din paranteză după regula binomului lui Newton și apoi se înmulțește formal cu f .

4. Dacă $f \in C^p(A)$, atunci se definește diferențiala de ordinul p a funcției f în punctul $a \in A$ ca fiind

$$d^p f(a)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}(a) x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p}$$

cu $\{i_1, \dots, i_p\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.

Folosind operatorul de diferențiere avem

$$d^p f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^p f.$$

Pentru $n = 2$

$$d^p f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^p f.$$

Exemplu 4.6.2 1. Să se calculeze diferențiala de ordinul n a funcției $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = \sin(ax + by)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Avem

$$\begin{aligned} d^n f &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f = \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}} dx^i dy^{n-i} = \\ &= \sum_{i=0}^n C_n^i a^i b^{n-i} \sin \left(ax + by + \frac{n\pi}{2} \right) dx^i dy^{n-i} = \\ &= \sin \left(ax + by + \frac{n\pi}{2} \right) \sum_{i=0}^n C_n^i a^i b^{n-i} dx^i dy^{n-i} = \\ &= \sin \left(ax + by + \frac{n\pi}{2} \right) (adx + bdy)^n. \end{aligned}$$

2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y, z) = x^2 + xy - xz^2$. Să calculăm diferențiala de ordinul al doilea a funcției f în punctul $(1, 1, 0)$. Avem

$$\begin{aligned} f'_x &= 2x + y - z^2, & f'_y &= x, & f'_z &= -2xz, \\ f''_{x^2} &= 2, & f''_{y^2} &= 0, & f''_{z^2} &= -2x, & f''_{xz} &= -2z, & f''_{yz} &= 0 & f''_{xy} &= 1, \\ f''_{x^2}(1, 1, 0) &= 2, & f''_{y^2}(1, 1, 0) &= 0, & f''_{z^2}(1, 1, 0) &= -2, & f''_{xz}(1, 1, 0) &= 0, \\ f''_{yz}(1, 1, 0) &= 0, & f''_{xy}(1, 1, 0) &= 1. \end{aligned}$$

Atunci $d^2 f(1, 1, 0) = 2dx^2 - 2dz^2 + dxdy$.

Definiția 4.6.4 Fie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^2(A)$ și $a \in A$. Matricea pătratică simetrică

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=\overline{1,n}}$$

se numește hessiana funcției f în punctul a .

4.7 Formula lui Taylor pentru funcții de o variabilă reală

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de n ori derivabilă în punctul $a \in I$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval. Pentru $x \in I$ definim polinomul $T_{n,a} : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$T_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

care se numește polinomul lui Taylor de gradul n , asociat funcției f și punctului a .

Pentru $x \in I$ definim funcția $R_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ $R_n(x) = f(x) - T_{n,a}(x)$, funcție numită restul de ordinul n . Avem $f(x) = T_{n,a}(x) + R_n(x)$, adică

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

și care se numește formula lui Taylor de ordin n a funcției f în punctul a .

Ne interesează să vedem în ce măsură restul de ordin n se poate exprima cu ajutorul funcției f .

Observația 4.7.1 1. Polinomul Taylor $T_{n,a}$ coincide cu funcția f pe I dacă și numai dacă f este o funcție polinomială de grad cel mult n . Într-adevăr, dacă $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, atunci $f(0) = a_0$, $f'(0) = a_1$, $f''(0) = 2a_2, \dots, f^{(n)}(0) = n!a_n$ și

$$T_{n,0}(x) = a_0 + a_1x + 2!\frac{a_2}{2!}x^2 + \dots + \frac{n!a_n}{n!}x^n = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Deoarece $T_{n,a}$ este o funcție polinomială rezultă că $T_{n,a}$ este indefinit derivabilă.

$$\begin{aligned} T'_{n,a}(x) &= f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \Rightarrow T'_{n,a}(a) = f'(a), \\ T''_{n,a}(x) &= f''(a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} \Rightarrow T''_{n,a}(a) = f''(a), \dots \end{aligned}$$

Se obține că $T_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, $\forall 0 \leq k \leq n$ și $T_{n,a}^{(k)}(x) = 0$, $\forall k \geq n+1$. Deoarece $R_n(x) = f(x) - T_{n,a}(x)$, rezultă că restul R_n are derivate de ordin k , $\forall 0 \leq k \leq n$ și $R_n^{(k)}(a) = 0$, $\forall 0 \leq k \leq n$.

Pentru orice $x \rightarrow a$ $R_n(x) \rightarrow 0$, adică în vecinătatea punctului a funcția $f(x)$ se poate aproxima cu polinomul Taylor $T_{n,a}$, eroarea în această aproximare fiind dată de $|R_n(x)| = |f(x) - T_{n,a}(x)|$.

Teorema 4.7.1 Formula lui Taylor (1685 - 1731) cu restul Peano (1858 - 1932)

Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție de n ori derivabilă în punctul $a \in I$, atunci există o funcție $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ continuă în a cu $\alpha(a) = 0$ astfel încât $\forall x \in I$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \alpha(x) \frac{(x-a)^n}{n!}.$$

DEMONSTRAȚIE: Notăm funcția $g(x) = (x-a)^n$. Avem $g^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)(x-a)^{n-k}$, $\forall 1 \leq k \leq n$ și deci $g^{(k)}(a) = 0$, $\forall 0 \leq k \leq n-1$ și $g^{(n)}(a) = n!$. Aplicăm în mod repetat teorema lui Cauchy funcțiilor g și R . Există un punct x , cuprins între a și x astfel încât:

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R'_n(x_1)}{g'(x_1)}$$

Aplicând din nou teorema lui Cauchy, rezultă că $\exists x_2$ cuprins între a și x_1 astfel încât

$$\frac{R'_n(x_1)}{g'(x_1)} = \frac{R''_n(x_2)}{g''(x_2)} \dots$$

Aplicând de $n-1$ ori teorema lui Cauchy rezultă că există un punct x_{n-1} cuprins între a și x astfel încât

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R'_n(x_1)}{g'(x_1)} = \dots = \frac{R_n^{(n-1)}(x_{n-1})}{g^{(n-1)}(x_{n-1})} = \frac{\frac{R_n^{(n-1)}(x_{n-1}) - R_n^{(n-1)}(a)}{x_{n-1} - a}}{\frac{g^{(n-1)}(x_{n-1}) - g^{(n-1)}(a)}{x_{n-1} - a}}.$$

Când $x \rightarrow a$ și $x_{n-1} \rightarrow a$, deci

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)} = \frac{0}{n!} = 0,$$

adică $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Definim funcția $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ prin

$$\alpha(x) = \begin{cases} n! \frac{R_n(x)}{(x-a)^n}, & x \in I, \ x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases},$$

$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = n! \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0 = \alpha(a) \Rightarrow \alpha$ este continuă în a și $\alpha(a) = 0$.

Dacă înlocuim R_n în formula lui Taylor obținem

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{\alpha(x)}{n!}(x-a)^n.$$

Teorema 4.7.2 *Formula lui Taylor cu restul lui Schömlisch (1823 - 1901) - Roche (1470 - 1530)*

Dacă funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este de $n+1$ ori derivabilă pe I , iar $a, x \in I$ sunt două puncte arbitrare, $a \neq x$ și $p \in \mathbb{N}$, atunci există un punct ξ situat între a și x astfel încât:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \\ & + \frac{(x-a)^p(x-\xi)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi). \end{aligned}$$

DEMONSTRAȚIE: Fie α un număr real pentru care are loc egalitatea:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \alpha(x-a)^p.$$

Definim funcția $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + \alpha(x-t)^p, \quad \forall t \in I.$$

Funcția φ este derivabilă pe I , $\varphi(x) = f(x)$ și $\varphi(a) = f(a)$. Aplicăm teorema lui Rolle funcției φ pe intervalul $[a, x]$ (sau $[x, a]$). Există un punct ξ cuprins între a și x astfel încât $\varphi'(\xi) = 0$.

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - f'(t) - \\ &\quad - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} - \alpha p(x-t)^{p-1} = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \alpha p(x-t)^{p-1}, \end{aligned}$$

$$\varphi'(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n - \alpha p(x-\xi)^{p-1} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi).$$

Prin urmare, restul R_n are forma:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^p(x-\xi)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi).$$

Observația 4.7.2 1. Dacă $p = 1$ se obține $R_n(x) = \frac{(x-a)(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)$ numit restul lui Cauchy.

Dacă $p = n + 1$ se obține $R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$ numit restul lui Lagrange.

Dacă $n = 1$ din formula lui Taylor cu restul Lagrange, rezultă că există ξ cuprins între a și x astfel încât

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(\xi),$$

adică formula creșterilor finite (Lagrange).

2. Punctul ξ cuprins între a și x depinde atât de a și x cât și de n și p . Prin urmare, punctele ξ din formulele restului sub forma Cauchy, respectiv Lagrange sunt diferite.

3. Cum ξ este cuprins între a și x , rezultă că există un număr $0 < \theta < 1$ astfel încât $\xi = a + \theta(x-a) = a + \theta h$, unde $h = x - a$. Atunci, formula lui Taylor se poate scrie sub forma:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} h + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(a + \theta h) \quad \text{Schlömlich - Roche}$$

$$R_n = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta h) \quad \text{Cauchy}$$

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta h) \quad \text{Lagrange (1736 - 1813)}$$

4. Un caz particular al formulei lui Taylor cu rest Lagrange este formula lui Mac-Laurin (1698 - 1746).

Dacă $a = 0$, atunci $\forall x \in I$, $\exists \xi = \theta x$ cu $0 < \theta < 1$ astfel încât

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Teorema 4.7.3 Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție de $n + 1$ derivabilă și $a \in I$ un punct arbitrar, atunci pentru orice $x \in I$, există un punct ξ cuprins între a și x astfel încât

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \\ + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt \end{aligned} \quad (4.25)$$

(4.25) se numește formula lui Taylor cu restul integral de ordin n , $n \geq 0$.

DEMONSTRAȚIE: Prin inducție după n .

Pentru $n = 0$ avem de arătat că $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$ ceea ce reprezintă chiar formula Leibniz-Newton.

Presupunem (4.25) adevărată pentru $n - 1$ și arătăm că se verifică și pentru n , adică

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

E suficient să observăm că are loc următoarea egalitate:

$$\int_a^x f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt - \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} & \int_a^x f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt - \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \\ &= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{n!} [n f^{(n)}(t) - f^{(n+1)}(t)(x-t)] dt = \\ &= \int_a^x -\frac{1}{n!} \frac{d}{dt} [(x-t)^n f^{(n)}(t)] dt = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \end{aligned}$$

Exemplu 4.7.1 1. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ este indefinit derivabilă și $f^{(n)}(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ și $\forall n \geq 0$, $f^{(n)}(0) = 1$, $\forall n \geq 0$. Formula lui Mac-Laurin asociată funcției f ne dă

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad \text{cu } 0 < \theta < 1.$$

Să evaluăm eroarea comisă în aproximarea

$$e \sim 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Eroarea comisă este

$$|R_n(1)| = \left| \frac{e^\theta}{(n+1)!} \right| < \frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!},$$

deci ea este mai mică decât $\frac{3}{(n+1)!}$.

2. Funcția $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \ln(1+x)$ este indefinit derivabilă pe $(-1, \infty)$ și $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, $\forall n \geq 1$; $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Atunci $\forall x > -1$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}},$$

unde $0 < \theta < 1$.

4.8 Formula lui Taylor pentru funcții de mai multe variabile

Definiția 4.8.1 Fie A o mulțime deschisă în \mathbb{R}^n și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă $C^p(A)$, $p \geq 2$. Pentru orice punct $a \in A$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ definim funcția

$$T_a(x) = (x_1 - a_1) \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + (x_2 - a_2) \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \cdots + (x_n - a_n) \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in A$.

"Puterea" $[T_a(x)]^{(k)}$, $k = \overline{2, p}$ se obține prin aplicarea unei formule de tip binomul lui Newton, în care se înlocuiește ridicarea la putere cu derivarea de ordinul puterii, adică $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)^k$, va fi de fapt $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(a)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)^k \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right)^l$ va fi $\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x_i^k \partial x_j^l}(a)$, etc, $k + l \leq n$.

Polinomul

$$T_{p,a}(x) = f(a) + \frac{1}{1!}T_a(x) + \frac{1}{2!}[T_a(x)]^2 + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}[T_a(x)]^{p-1}$$

se numește polinomul Taylor de grad $p-1$ asociat funcției f și punctului $a \in A$.

Teorema 4.8.1 Formula lui Taylor

Fie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^p(A)$, $p \geq 2$, unde $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n$, $a \in A$ și $S(a, r) \subset A$, $r > 0$. Atunci pentru orice $x \in S(a, r)$ există un punct ξ situat pe segmentul ce unește punctele a și x astfel încât să avem:

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}T_a(x) + \frac{1}{2!}[T_a(x)]^2 + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}[T_a(x)]^{p-1} + \frac{1}{p!}[T_\xi(x)]^p \quad (4.26)$$

DEMONSTRAȚIE: Fie $s \in \mathbb{R}^n$ un versor și definim funcția $g : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = f(a + ts)$. Funcția f fiind de clasă $C^p(A)$, rezultă că g este de p ori derivabilă pe $(-r, r)$. Aplicând formula lui Mac-Laurin cu rest Lagrange funcției g , rezultă că $\forall t \in (-r, r)$, $\exists \xi_0$ cuprins între 0 și t astfel încât

$$g(t) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}t + \frac{g''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{g^{(p-1)}(0)}{(p-1)!}t^{p-1} + \frac{g^{(p)}(\xi_0)}{p!}t^p \quad (4.27)$$

$g(t) = f(a_1 + ts_1, a_2 + ts_2, \dots, a_n + ts_n)$ și dacă notăm $a + ts = x$ avem

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a + ts)s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a + ts)s_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a + ts)s_n, \\ g'(0) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)s_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)s_n. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Înmulțind (4.28) cu t obținem

$$\begin{aligned} tg'(0) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)ts_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)ts_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)ts_n = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(x_2 - a_2) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n) = T_a(x), \\ g''(t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a + ts)s_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a + ts)s_2^2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a + ts)s_n^2 + \\ &+ 2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a + ts)s_1s_2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n}(a + ts)s_{n-1}s_n \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Înmulțind (4.29) cu t^2 obținem

$$\begin{aligned} t^2 g''(0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)(x_1 - a_1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)(x_2 - a_2)^2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a)(x_n - a_n)^2 + \\ &+ 2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + \cdots + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n}(a)(x_{n-1} - a_{n-1})(x_n - a_n) \right] = [T_a(x)]^2 \end{aligned}$$

și așa mai departe $t^k g^k(0) = [T_a(x)]^k \forall 1 \leq k \leq p-1$ și $t^p g^{(p)}(\xi_0) = [T_\xi(x)]^p$, unde $\xi = \xi_0 + ts$. Atunci relația (4.27) devine

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}T_a(x) + \frac{1}{2!}[T_a(x)]^2 + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}[T_a(x)]^{p-1} + \frac{1}{p!}[T_\xi(x)]^p.$$

Observația 4.8.1 a) Pentru $a = 0 \in \mathbb{R}^n$ se obține formula lui Mac-Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}T_0(x) + \frac{1}{2!}[T_0(x)]^2 + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}[T_0(x)]^{p-1} + \frac{1}{p!}[T_\xi(x)]^p.$$

b) Formula lui Taylor pentru $n = 2$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b) \right] f(a, b) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b) \right]^2 f(a, b) + \cdots + \frac{1}{(p-1)!} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial y}(y-b) \right]^{p-1} f(a, b) + \frac{1}{p!} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b) \right]^p f(\xi, \eta), \end{aligned}$$

$\forall (x, y) \in A$.

Exemplu 4.8.1 Scriem formula lui Taylor pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = e^{ax+by}$ în punctul $(1, -1)$. Funcția $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ și avem $\frac{\partial^p f}{\partial x^k \partial y^{p-k}}(x, y) = a^k b^{p-k} e^{ax+by}$, $\forall p \geq 1$ și $\forall k = \overline{1, p}$, $\frac{\partial^p f}{\partial x^k \partial y^{p-k}}(1, -1) = a^k b^{p-k} e^{a-b}$.

Atunci există (ξ_1, ξ_2) situat pe segmentul ce unește punctele $(1, -1)$ și (x, y) astfel încât $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ să se verifice (4.26), adică

$$\begin{aligned} e^{ax+by} &= e^{a-b} \left[1 + \frac{1}{1!}[a(x-1) + b(y+1)] + \frac{1}{2!}[a(x-1) + b(y-1)]^2 + \right. \\ &\left. + \cdots + \frac{1}{n!}[a(x-1) + b(y-1)]^n \right] + \frac{e^{a\xi_1+b\xi_2}}{(n+1)!}[a(x-1) + b(y+1)]^{n+1}. \end{aligned}$$

Aplicații ale formulei lui Taylor

1. Calculul limitelor de funcții

Formula lui Taylor se folosește la calculul limitelor de funcții. Pentru a calcula limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - \sin 2x + 2x^2}{x^3},$$

folosim formula lui Mac-Laurin pentru funcția $f(x) = \ln(1+2x) - \sin 2x + 2x^2$, $f(0) = 0$.

$$f'(x) = \frac{2}{1+2x} - 2 \cos 2x + 4x \Rightarrow f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = \frac{-4}{(1+2x)^2} + 4 \sin 2x + 4 \Rightarrow f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = \frac{16}{(1+2x)^3} + 8 \cos 2x \Rightarrow f'''(0) = 24$$

Atunci

$$f(x) = 24 \frac{x^3}{3!} + R_3(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + R_3(x)}{x^3} = 4 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_3(x)}{x^3} = 4.$$

2. Studiul punctelor de extrem

O condiție necesară ca un punct de derivabilitate al unei funcții să fie punct de extrem este ca derivata funcției în acest punct să fie zero. Această condiție este o condiție necesară dar nu suficientă. Următoarea teoremă ne dă condiții suficiente pentru ca un punct de derivabilitate al unei funcții să fie punct de extrem.

Teorema 4.8.2 *Fie o funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de n ori derivabilă într-un punct $a \in I$ astfel încât*

$$f'(a) = 0, f''(a) = 0, \dots, f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{și} \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Atunci: 1) Dacă n este par, punctul a este un punct de extrem al lui f și anume: dacă $f^{(n)}(a) > 0$, rezultă a punct de minim, iar dacă $f^{(n)}(a) < 0$ avem a punct de maxim.

2) Dacă n este impar și $a \in \overset{\circ}{I}$, atunci a nu este punct de extrem al funcției f (doar punct critic).

DEMONSTRAȚIE: Scriem formula lui Taylor asociată funcției f și punctului a , cu restul Peano:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} \alpha(x), \quad \forall x \in I,$$

unde α este o funcție continuă în punctul a cu $\alpha(a) = 0$. Atunci

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^n}{n!} [f^{(n)}(a) + \alpha(x)]$$

și $\lim_{x \rightarrow a} [f^{(n)}(a) + \alpha(x)] = f^{(n)}(a)$.

Dacă $f^{(n)}(a) > 0$, atunci $\exists V \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $f^{(n)}(a) + \alpha(x) > 0$, iar dacă $f^{(n)}(a) < 0$, atunci $\exists V \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $f^{(n)}(a) + \alpha(x) < 0, \forall x \in V$. Cum n este par avem $(x-a)^n \geq 0, \forall x \in I$.

Deci, dacă $f^{(n)} > 0$ și n este par, $\exists V \in \mathcal{V}_a$ astfel încât

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^n}{n!} (f^{(n)}(a) + \alpha(x)) > 0, \quad \forall x \in V,$$

de unde $f(x) \geq f(a), \forall x \in V$, așadar, a este punct de minim.

Dacă $f^{(n)} < 0$ și n par, $\exists V \in \mathcal{V}_a$ astfel încât

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^n}{n!} (f^{(n)}(a) + \alpha(x)) < 0, \quad \forall x \in V,$$

de unde $f(x) \leq f(a), \forall x \in V$, așadar, a este punct de maxim.

Dacă $a \in \overset{\circ}{I}$ și n impar, atunci $(x-a)^n < 0$, dacă $x < a$ și $(x-a)^n > 0$ dacă $x > a$, adică $(x-a)^n$ nu păstrează semn constant în nici o vecinătate a punctului a , deci nici $f(x) - f(a)$ nu păstrează semn constant în nici o vecinătate a punctului a .

Exemplu 4.8.2 1. Să determinăm punctele de extrem ale funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 2 \cos x + x^2$. Avem $f'(x) = -2 \sin x + 2x$ și $f'(x) = 0$ pentru $x = 0$. Apoi $f''(x) = -2 \cos x + 2$, $f''(0) = 0$, $f'''(x) = 2 \sin x$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(x) = 2 \cos x$, $f^{(4)}(0) = 2 > 0$, ceea ce implică faptul că $x = 0$ este un punct de minim al funcției date.

2. Pentru funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^3$ avem $f'(x) = 3x^2$ și $f'(x) = 0$ pentru $x = 0$. Apoi $f''(x) = 6x$, $f''(0) = 0$, $f'''(x) = 6 \neq 0$. Ordinul de derivare fiind impar rezultă că $x = 0$ nu este punct de extrem.

4.9 Puncte de extrem

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție reală.

Definiția 4.9.1 *Un punct $a \in A$ se numește punct de extrem local al funcției f dacă există un sferoid $S(a, r)$ astfel încât diferența $f(x) - f(a)$ păstrează semn constant pentru orice $x \in S(a, r) \cap A$. Dacă $f(x) \geq f(a)$, respectiv $f(x) \leq f(a)$, pentru orice $x \in S(a, r) \cap A$, punctul a se numește punct de minim, respectiv maxim local.*

Definiția 4.9.2 *Un punct $a \in \overset{\circ}{A}$ se numește punct staționar sau critic al funcției f dacă funcția f este diferențiabilă în punctul a și dacă $df(a) = 0$.*

Observația 4.9.1 *Deoarece $df(a) = f'_{x_1}(a)dx_1 + f'_{x_2}(a)dx_2 + \cdots + f'_{x_n}(a)dx_n$, atunci $df(a) = 0 \Leftrightarrow f'_{x_1}(a) = f'_{x_2}(a) = \cdots = f'_{x_n}(a) = 0$.*

Următoarea teoremă, care constituie o generalizare a teoremei lui Fermat pentru funcții de o variabilă reală, stabilește condiții necesare de extrem.

Teorema 4.9.1 *Fermat (1601 - 1665)*

Fie funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, unde $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n$. Dacă funcția f este diferențiabilă într-un punct $a \in A$, care este punct de extrem local al funcției f , atunci a este punct critic.

DEMONSTRAȚIE. Întrucât a este punct de extrem al funcției f , conform definiției 4.9.1, există $S(a, r)$ astfel încât diferența $f(x) - f(a)$ păstrează semn constant pentru orice $x \in S(a, r) \cap A$. Fie $v \in \mathbb{R}^n$ un versor și funcția $g : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$, atunci definită prin $g(t) = f(a + tv)$, pentru orice $|t| < r$. Deoarece f este diferențiabilă în a , funcția g este derivabilă în $t = 0$, iar diferența $g(t) - g(0) = f(a + tv) - f(a)$ păstrează semn constant pentru orice $t \in (-r, r)$, atunci punctul $t = 0$ este punct de extrem local al funcției g . Conform teoremei lui Fermat pentru funcții de o variabilă reală, rezultă că $g'(0) = 0$, adică $\frac{df}{ds}(a) = 0$. Dar, $f(a) = (\nabla f(a), v)$, adică $df(a) = 0$.

Observația 4.9.2 *1. Din teorema 4.9.1 și observația 4.9.1 rezultă că punctele de extrem (dacă există) se pot găsi printre soluțiile sistemului*

$$f'_{x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (4.30)$$

2. Reciproca teoremei 4.9.1 nu este în general valabilă, după cum se va observa și din exemplul următor. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - y^2$;

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = x = 0 \\ f'_y(x, y) = -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow a = (0, 0) \quad \text{punct critic,}$$

dar $f(x, x) = -\frac{x^2}{2} < f(0, 0) = 0 < f(x, 0) = \frac{x^2}{2}$, pentru orice $x \neq 0$. Așadar, punctul $a = (0, 0)$ este doar punct critic nu și punct de extrem, deși f este diferențiabilă în a și $df(a) = 0$.

3. Funcția $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ are punctele $x = 1$, respectiv $x = 2$ de minim, respectiv maxim, dar $f'(1) \neq 0, f'(2) \neq 0$. Deci nu orice soluție a sistemului (4.30) este punct de extrem.

Definiția 4.9.3 *Punctele critice ale unei funcții diferențiabile $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n$, care nu sunt puncte de extrem ale ei se numesc puncte șa.*

În continuare vom stabili condiții suficiente pentru ca un punct critic să fie punct de extrem.

Lema 4.9.1 *Fie $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ forma pătratică asociată unei matrici pătratice simetrice $(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, adică $\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dacă φ este pozitiv definită ($\varphi(x) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$), atunci există $\alpha > 0$ astfel încât*

$$\varphi(x) \geq \alpha \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (4.31)$$

DEMONSTRAȚIE. Considerăm mulțimea $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ - sfera unitate din \mathbb{R}^n , care este închisă și mărginită, deci compactă.

Funcția φ fiind continuă pe mulțimea compactă S este mărginită și își atinge marginile, adică, dacă $\alpha = \inf_{x \in S} \varphi(x)$, atunci există $x_0 \in S$ astfel încât $\alpha = \varphi(x_0) \neq 0$, deoarece $0 \notin S$ și prin urmare $\alpha > 0$. Astfel $\varphi(x) \geq \alpha$ pentru orice $x \in S$.

Fie $y = \frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$; atunci $\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \alpha \Rightarrow \frac{1}{\|x\|^2} \varphi(x) \geq \alpha \Rightarrow \varphi(x) \geq \alpha \|x\|^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$. Cum pentru $x = 0$ avem egalitate, obținem $\varphi(x) \geq \alpha \|x\|^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

Observația 4.9.3 *Dacă forma pătratică φ este negativ definită ($\varphi(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$), atunci există $\alpha > 0$ astfel încât $\varphi(x) \leq -\alpha \|x\|^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.*

Teorema 4.9.2 *Fie mulțimea $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă $C^2(A)$ și $a \in A$ un punct critic al funcției f . Dacă $d^2 f(a)$ este pozitiv definită, respectiv negativ definită, atunci a este punct de minim, respectiv maxim local al funcției f .*

DEMONSTRAȚIE. Întrucât $f \in C^2(A)$ putem scrie formula lui Taylor asociată funcției f și punctului a cu restul de ordinul doi. Avem

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{1}{1!} [f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + f'_{x_n}(a)(x_n - a_n)] + \\ &\quad + \frac{1}{2!} [f''_{x_1^2}(\xi)(x_1 - a_1)^2 + 2f''_{x_1 x_2}(\xi)(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + \dots + \\ &\quad + f''_{x_n^2}(\xi)(x_n - a_n)^2] \end{aligned} \quad (4.32)$$

Cum a este punct critic, rezultă că $f'_{x_i}(a) = 0$, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Atunci (4.32) devine

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \frac{1}{2!} [f''_{x_1^2}(\xi)(x_1 - a_1)^2 + 2f''_{x_1 x_2}(\xi)(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + \dots + \\ &\quad + f''_{x_n^2}(\xi)(x_n - a_n)^2] = \frac{1}{2} [f''_{x_1^2}(a)(x_1 - a_1)^2 + 2f''_{x_1 x_2}(a)(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + \dots + \\ &\quad + f''_{x_n^2}(a)(x_n - a_n)^2 + (f''_{x_1^2}(\xi) - f''_{x_1^2}(a))(x_1 - a_1)^2 + \\ &\quad + 2(f''_{x_1 x_2}(\xi) - f''_{x_1 x_2}(a))(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + \dots + \\ &\quad + (f''_{x_n^2}(\xi) - f''_{x_n^2}(a))(x_n - a_n)^2] = \frac{1}{2} [d^2 f(a)(x - a) + \beta(x)\|x - a\|^2], \end{aligned} \quad (4.33)$$

cu $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0$.

Dacă forma pătratică $d^2f(a)$ este pozitiv definită, atunci conform lemei 4.9.1, are loc (4.31), deci există $\alpha > 0$ astfel încât $d^2f(a)(x-a) \geq \alpha\|x-a\|^2$. Atunci (4.33) devine

$$f(x) - f(a) \geq \frac{1}{2}[\alpha\|x-a\|^2 + \beta(x)\|x-a\|^2] = \frac{1}{2}(\alpha + \beta(x))\|x-a\|^2.$$

Deoarece $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = \alpha \Rightarrow \exists S(a, r)$ astfel încât $\alpha + \beta(x) > 0$, pentru orice $x \in S(a, r) \cap A$, așadar $f(x) - f(a) > 0$, pentru orice $x \in S(a, r) \cap A$, adică a este punct de minim local al funcției f .

Analog se arată și cazul când $d^2f(a)$ este negativ definită.

Algoritm pentru determinarea punctelor de extrem local

1. Dată fiind funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^2(A)$ se rezolvă sistemul (4.30), așadar se determină punctele critice ale funcției f .
2. Matricea asociată formei pătratice $d^2f(a)$ este hessiana. Pentru fiecare punct critic a se calculează hessiana corespunzătoare și, folosind criteriul lui Sylvester, se decide dacă forma pătratică $d^2f(a)$ este pozitiv definită, respectiv negativ definită.

Criteriul lui Sylvester (1814 - 1897): Fie $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ forma pătratică asociată matricii simetrice $(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ și

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. φ este pozitiv definită, respectiv negativ definită;
2. $\Delta_k > 0$, pentru orice $k = \overline{1,n}$, respectiv $(-1)^k \Delta_k > 0$, pentru orice $k = \overline{1,n}$.

Observația 4.9.4 Dacă $d^2f(a)$ ia și valori pozitive și valori negative, atunci a nu este punct de extrem.

Exemplu: 1. Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Avem

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

și rezolvând acest sistem se obțin punctele critice $(0, 0)$ și $(1, 1)$. Calculăm hessiana: $f''_{x^2} = 6x$, $f''_{xy} = -3$, $f''_{y^2} = 6y$. Pentru punctul $(0, 0)$: $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -9 \Rightarrow (0, 0)$ este punct ș.a.

Pentru punctul $(1, 1)$: $H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0 \Rightarrow (1, 1)$ este punct de minim.

4.10 Difeomorfisme. Teorema de inversiune locală

Definiția 4.10.1 Fie $D, D_1 \subset \mathbb{R}^n$ mulțimi deschise și $F : D \rightarrow D_1$ o funcție de clasă $C^1(D)$. Dacă F este bijectivă și inversa ei $F^{-1} : D_1 \rightarrow D$ este o funcție de clasă $C^1(D_1)$, atunci F se numește difeomorfism sau izomorfism diferențiabil sau transformare regulată.

Observația 4.10.1 Orice difeomorfism este un homeomorfism.

Teorema 4.10.1 de caracterizare a difeomorfismelor.

Fie $D, D_1 \subset \mathbb{R}^n$ două mulțimi deschise și $F : D \rightarrow D_1$ o funcție bijectivă de clasă $C^1(D)$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. F este difeomorfism;
2. Pentru orice punct $a \in D$, $dF(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ este un izomorfism de spații liniare și $F^{-1} \in C^0(D_1)$;
3. Pentru orice punct $a \in D$, jacobianul funcției F în a este nenul și $F^{-1} \in C^0(D_1)$.

DEMONSTRAȚIE: $2 \Leftrightarrow 3$ Matricea asociată aplicației liniare $dF(a)$ în baza canonică din \mathbb{R}^n este matricea jacobiană a funcției F în punctul a , $J_F(a)$, adică matricele nesingulare corespund izomorfismelor liniare.

$1 \Rightarrow 2$ F difeomorfism $\Rightarrow F^{-1} \in C^1(D_1)$, $F \in C^1(D)$, adică F^{-1} și F sunt diferențiabile pe D_1 , respectiv D , $F \circ F^{-1} = 1_{D_1}$ și $F^{-1} \circ F = 1_D$.

Atunci, conform relației (4.15), $J_{F \circ F^{-1}}(a_1) = U_n$, pentru orice $a_1 \in D_1$ și $J_{F^{-1} \circ F}(a) = U_n$, pentru orice $a \in D \Rightarrow J_F(F^{-1}(a_1))J_{F^{-1}}(a_1) = U_n$ și $J_{F^{-1}}(F(a))J_F(a) = U_n$, pentru orice $a \in D$, și $a_1 \in D_1$, deci matricea $J_F(a)$ este inversabilă și $J_{F^{-1}}(F(a)) = J^{-1}(F(a))$, pentru orice $a \in D$.

$2 \Rightarrow 1$ Presupunem că pentru orice $a \in D$ $df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ este un izomorfism liniar și $F^{-1} \in C^0(D_1)$. Pentru ca F să fie difeomorfism este suficient să arătăm că F^{-1} este diferențiabilă în orice punct din D_1 și derivatele parțiale de ordinul I ale lui F^{-1} sunt funcții continue pe D_1 .

Fie $a_1 \in D_1$, $F^{-1}(a_1) = a \in D$ și $T = dF(a)$.

Întrucât $F \in C^1(D) \Rightarrow F$ diferențiabilă pe $D \Rightarrow F$ diferențiabilă în $a \Rightarrow$ există o funcție continuă $\alpha : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$F(x) = F(a) + T(x - a) + \alpha(x)\|x - a\|, \quad \text{cu} \quad \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0_{\mathbb{R}^n};$$

$$T(x - a) = F(x) - F(a) - \alpha(x)\|x - a\| \quad \text{și aplicând} \quad T^{-1}, \quad \text{se obține}$$

$$x - a = T^{-1}(y - a_1) - \|x - a\|T^{-1}(\alpha(x)), \quad \text{unde} \quad y = F(x), \quad (4.34)$$

$$F^{-1}(y) - F^{-1}(a_1) - T^{-1}(y - a_1) = -\|x - a\|T^{-1}(\alpha(x)),$$

$$\frac{F^{-1}(y) - F^{-1}(a_1) - T^{-1}(y - a_1)}{\|y - a_1\|} = -\frac{\|x - a\|}{\|y - a_1\|}T^{-1}(\alpha(x)).$$

Arătăm că raportul $\frac{\|x - a\|}{\|y - a_1\|}$ este mărginit. Din (4.34) avem

$$\begin{aligned} \|x - a\| &= \|T^{-1}(y - a_1) - \|x - a\|T^{-1}(\alpha(x))\| \leq \\ &\leq \|T^{-1}(y - a_1)\| + \|x - a\| \|T^{-1}(\alpha(x))\| \end{aligned} \quad (4.35)$$

T^{-1} fiind aplicație liniară și continuă, conform teoremei 3.8.1, există $m > 0$ astfel încât $\|T^{-1}(y - a_1)\| \leq m\|y - a_1\|$.

Din (4.35) rezultă $\|x - a\| \leq m\|y - a_1\| + \|x - a\|\|T^{-1}(\alpha(x))\| \Rightarrow$

$$\frac{\|x - a\|}{\|y - a_1\|} \leq m + \frac{\|x - a\|}{\|y - a_1\|}\|T^{-1}(\alpha(x))\| \quad (4.36)$$

$y \rightarrow a_1 \Leftrightarrow F^{-1}(y) \rightarrow F^{-1}(a_1) \quad (F^{-1} \in C^0(D_1))$, deci $x \rightarrow a \Leftrightarrow y \rightarrow a_1$.

$$\lim_{x \rightarrow a} T^{-1}(\alpha(x)) = T^{-1}\left(\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)\right) = T^{-1}(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \|T^{-1}(\alpha(x))\| \rightarrow 0.$$

Așadar, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $V \in \mathcal{V}_{a_1}$ astfel încât pentru orice $y \in V$ $\|T^{-1}(\varphi(x))\| < \varepsilon$ și cu (4.36) avem

$$\frac{\|x - a\|}{\|y - a_1\|} \leq m + \frac{\|x - a\|}{\|y - a_1\|}\varepsilon \Rightarrow \frac{\|x - a\|}{\|y - a_1\|} < \frac{m}{1 - \varepsilon},$$

adică raportul $\frac{\|x - a\|}{\|y - a_1\|}$ este mărginit. Prin urmare,

$$\lim_{y \rightarrow a_1} \frac{F^{-1}(y) - F^{-1}(a_1) - T^{-1}(y - a_1)}{\|y - a_1\|} = - \lim_{y \rightarrow a_1} \frac{\|x - a\|}{\|y - a_1\|} T^{-1}(\alpha(x)) = 0_{\mathbb{R}^n},$$

deci funcția F^{-1} este diferențiabilă în punctul a , și în plus, $dF^{-1}(a_1) = (dF(a))^{-1}$. Punctul a_1 fiind ales arbitrar din D_1 , rezultă că F^{-1} este diferențiabilă pe D_1 . Astfel, funcția F^{-1} are derivate parțiale de ordinul I în orice punct din D_1 . Mai rămâne să arătăm că acestea sunt funcții continue pe D_1 . Datorită faptului că $dF(a)$ este izomorfism liniar, avem $\det J_F(a) \neq 0$, pentru orice $a \in D$, iar din $F \in C^1(D)$ reiese că elementele matricii $J_F(a)$ sunt funcții continue. Întrucât $J_{F^{-1}}(F(a)) = J_F^{-1}(a)$ elementele matricii $J_F^{-1}(a)$ sunt funcții continue, rezultă atunci că elementele matricii $J_{F^{-1}}(a_1)$ sunt funcții continue pentru orice $a_1 \in D_1$, prin urmare, $F^{-1} \in C^1(D_1)$.

Corolarul 4.10.1 1. Dacă $F : D \rightarrow D_1$ și $G : D_1 \rightarrow D_2$ sunt difeomorfisme, unde D, D_1 și $D_2 \subset \mathbb{R}^n$ sunt mulțimi deschise, atunci $G \circ F : D \rightarrow D_2$ este difeomorfism.

2. Dacă $F : D \rightarrow D_1$ este difeomorfism, atunci $F^{-1} : D_1 \rightarrow D$ este difeomorfism.

DEMONSTRAȚIE.

1. F, G difeomorfisme $\Rightarrow F, G$ bijectii, $F \in C^1(D)$, $G \in C^1(D_1)$, $F^{-1} \in C^0(D_1)$, $G^{-1} \in C^0(D_1)$ și $J_F(a), J_G(a_1)$ nesingulare pentru orice $a \in D, a \in D_1$. Atunci $G \circ F : D \rightarrow D_2$ este bijectie, $G \circ F \in C^1(D)$, $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1} \in C^0(D_2)$ și $J_{G \circ F}(a) = J_G(F(a))J_F(a)$, $J_{G \circ F}(a)$ nesingulară pentru orice $a \in D$ și, conform teoremei 4.10.1, obținem că $G \circ F$ este difeomorfism.

2. Rezultă din definiția 4.10.1.

Corolarul 4.10.2 Dacă $F : D \rightarrow D_1$ este difeomorfism de clasă $C^p(D)$, $p \geq 1$ unde $D, D_1 \subset \mathbb{R}^n$ mulțimi deschise, atunci $F^{-1} : D_1 \rightarrow D$ este difeomorfism de clasă $C^p(D_1)$.

Exemplu 4.10.1 Dacă $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ este o aplicație liniară, conform teoremei 4.10.1, T este difeomorfism dacă și numai dacă jacobianul lui T este nenul, adică matricea transformării liniare T este nesingulară.

În cele ce urmează vom prezenta o teoremă importantă în analiza matematică, care reduce problema bijectivității unei funcții de clasă C^1 la problema bijectivității unei aplicații liniare.

Teorema 4.10.2 (teorema funcției inverse) Fie $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n, D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n$, o funcție de clasă $C^1(D)$ și $a \in D$ astfel încât $dF(a)$ este izomorfism liniar. Atunci există o mulțime deschisă $D_1 \subset D, a \in D_1$ astfel ca $F(D_1) = D_2$ să fie mulțime deschisă, iar F să stabilească un difeomorfism între D_1 și D_2 .

DEMONSTRAȚIE. Fără a particulariza putem presupune că $a = 0_{\mathbb{R}^n}$ și $F(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$ (altfel se vor face translații de vectori a și $F(a)$ care sunt difeomorfisme). De asemenea, putem presupune $T = dF(0) = 1_{\mathbb{R}^n}$. Într-adevăr, dacă $T = dF(0) = 1_{\mathbb{R}^n}$, atunci considerăm funcția $F_1 = T^{-1} \circ F$; $F_1(0) = T^{-1}(F(0)) = T^{-1}(0) = 0$, $dF_1(0) = dT^{-1}(0) \circ dF(0) = T^{-1} \circ T = 1_{\mathbb{R}^n}$.

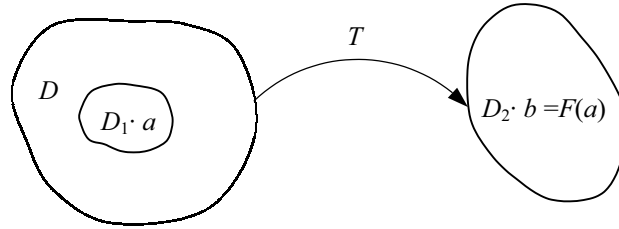


Figura 4.9:

Dacă teorema are loc pentru funcția F_1 , atunci există o mulțime deschisă $D'_1 \subset \mathbb{R}$ așa încât $0 \in D'_1 \subset D, F_1(D'_1) = D'_2 \subset \mathbb{R}^n$ este mulțime deschisă, iar F_1 stabilește un difeomorfism între D'_1 și D'_2 . Întrucât T este difeomorfism se obține $(T \circ F_1)(D'_1) = F(D'_1) = D_2 \subset \mathbb{R}^n$ este deschisă și $F = T \circ F_1$ este un difeomorfism între D'_1 și D_2 .

În conformitate cu cele de mai sus vom lucra în ipoteza $a = 0, F(0) = 0$ și $dF(0) = 1_{\mathbb{R}^n}$.

Fie funcția $H : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ definită prin

$$H = F - 1_{\mathbb{R}^n} \quad (4.37)$$

Întrucât $F \in C^1(D)$ rezultă că $H \in C^1(D)$ și, în plus, $dH(0) = dF(0) - d1_{\mathbb{R}^n}(0) = 1_{\mathbb{R}^n} - 1_{\mathbb{R}^n} = 0$.

Dacă h_1, h_2, \dots, h_n sunt componentele funcției $H, H = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, cum $\frac{\partial h_i}{\partial x_k} \in C^0(D)$ și $\frac{\partial h_i}{\partial x_k}(0) = 0$, pentru orice $i, k = \overline{1, n}$, există un sferoid $S(0, \delta) \subset D$ astfel ca $\|dh_i(x)\| < \frac{1}{n}$ pentru orice $x \in S(0, \delta), \forall i = \overline{1, n}$. Aplicând corolarul 4.5.3 avem:

$$|h_i(x) - h_i(y)| < \frac{1}{2n} \|x - y\|, \forall x, y \in S(0, r), \forall i = \overline{1, n},$$

deci

$$\|H(x) - H(y)\| = \left[\sum_{k=1}^n (h_i(x) - h_i(y))^2 \right]^{1/2} \leq \frac{1}{2} \|x - y\|, \quad \forall x, y \in S(0, \delta) \quad (4.38)$$

Fie $D'_2 = S\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ și $D'_1 = S(0, \delta) \cap F^{-1}(D'_2)$; D'_1, D'_2 sunt mulțimi deschise în $\mathbb{R}^n, 0 \in D'_1 \subset D, F(D'_1) \subseteq F(F^{-1}(D'_2)) \subseteq D'_2$.

Arătăm că funcția $F : D'_1 \rightarrow D'_2$ este injectivă; pentru aceasta fie $a_1, a_2 \in D'_1$ așa încât $F(a_1) = F(a_2)$. Din (4.37) avem $H(a_1) + a_1 = H(a_2) + a_2$,

$$\|a_1 - a_2\| = \|H(a_2) - H(a_1)\| \leq \frac{1}{2} \|a_1 - a_2\| \Rightarrow \|a_1 - a_2\| = 0 \Rightarrow a_1 = a_2,$$

adică funcția F este injectivă.

Pentru orice $y \in D'_2$ definim funcția $\varphi_y : \overline{S(0, \delta)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\varphi_y(x) = y - H(x)$, $\forall x \in \overline{S(0, \delta)}$ și arătăm că aceasta este o contracție pe spațiul metric complet $\overline{S(0, \delta)}$.

$\forall x_1, x_2 \in \overline{S(0, \delta)}$ $\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| = \|H(x_2) - H(x_1)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$, adică φ_y este o contracție cu coeficientul de contracție $c = \frac{1}{2}$. Conform teoremei de punct fix Banach, funcția φ_y are un singur punct fix, pe care-l notăm $G(y)$. Așadar $\varphi_y(G(y)) = G(y)$, adică $y - H(G(y)) = G(y)$, $\forall y \in D'_2$. Dacă înlocuim în (4.38) $y = 0$ se obține $\|H(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x\|$, pentru orice $x \in S(0, \delta)$ deci $\|H(G(y))\| \leq \frac{1}{2}\|G(y)\|$;

$$\|G(y)\| = \|y - H(G(y))\| \leq \|y\| + \|H(G(y))\| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\|G(y)\|}{2} \Rightarrow \|G(y)\| \leq \delta$$

și, prin urmare,

$$G(y) \in S(0, \delta). \quad (4.39)$$

Pe de altă parte $F(G(y)) = H(G(y)) + G(y) = y$, de unde $G(y) \in F^{-1}(D'_2)$, care împreună cu (4.39) ne dă $G(y) \in F^{-1}(D'_2) \cap S(0, \delta) = D'_1$.

Astfel s-au definit funcțiile $F : D'_1 \rightarrow D'_2$, $G : D'_2 \rightarrow D'_1$ cu următoarele proprietăți: F este injectivă, $F \circ G = 1_{D'_2}$, de unde obținem că F este și surjectivă, deci bijectivă și $G = F^{-1}$.

Vrem ca $F^{-1} \in C^0(D'_2)$. Pentru orice $y_1, y_2 \in D'_2$ avem

$$\begin{aligned} \|F^{-1}(y_1) - F^{-1}(y_2)\| &= \|y_1 - H(F^{-1}(y_1)) - y_2 + H(F^{-1}(y_2))\| \leq \\ &\leq \|y_1 - y_2\| + \|H(F^{-1}(y_1)) - H(F^{-1}(y_2))\| \leq \\ &\leq \|y_1 - y_2\| + \frac{1}{2}\|F^{-1}(y_1) - F^{-1}(y_2)\| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|F^{-1}(y_1) - F^{-1}(y_2)\| \leq 2\|y_1 - y_2\| \end{aligned} \quad (4.40)$$

Astfel, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ așa încât $\forall y_1, y_2 \in D'_2$ cu $\|y_1 - y_2\| < \frac{\delta(\varepsilon)}{2} \Rightarrow \|F^{-1}(y_1) - F^{-1}(y_2)\| < \varepsilon$, adică funcția F^{-1} este uniform continuă pe D'_2 , deci $F^{-1} \in C^0(D'_2)$.

Matricea jacobiană $J_F(0)$ este nesingulară și, cum ea este alcătuită numai din funcții continue, rezultă că există un deschis $D_1 \subset D'_1$ astfel încât $0 \in D_1$ și $J_F(x)$ este nesingulară $\forall x \in D_1$. Mulțimea $D_2 = F(D_1) \subset \mathbb{R}^n$ este, de asemenea, deschisă, $F : D_1 \rightarrow D_2$ bijectie, $F^{-1} \in C^0(D_2)$, $F \in C^1(D_1)$ și $J_F(x)$ nesingulară $\forall x \in D_1$. În aceste condiții conform teoremei 4.10.1 se obține că F stabilește un difeomorfism între D_1 și D_2 .

Corolarul 4.10.3 Fie $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ o funcție de clasă $C^1(D)$, $D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n$, astfel ca matricea jacobiană $J_F(a)$ să fie nesingulară pentru orice $a \in D$. Atunci funcția F transformă mulțimi deschise în mulțimi deschise.

DEMONSTRAȚIE. Fie $D_1 \subseteq D$ mulțime deschisă și $a_1 \in F(D_1)$. Atunci există $a \in D_1$ cu $F(a) = a_1$. Conform teoremei 4.10.2 rezultă că există o mulțime deschisă D_2 astfel ca $a \in D_2 \subseteq D$ și $F(D_2)$ este o mulțime deschisă în \mathbb{R}^n . Dar $F(a) \in F(D_2) \subseteq F(D_1)$, adică $F(D_1)$ este mulțime deschisă.

Corolarul 4.10.4 Fie $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ o funcție de clasă $C^1(D)$, $D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n$, de componente $f_1, f_2, \dots, f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă $a \in D$ și matricea jacobiană $J_F(a)$ este nesingulară, atunci există $V \in \mathcal{V}_{F(a)}$ astfel încât pentru orice $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in V$ sistemul $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_i$, pentru orice $i = \overline{1, n}$ are soluție unică $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$, unde $U \in \mathcal{V}_a$.

DEMONSTRAȚIE. Conform teoremei 4.10.1 există $U \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $F : U \rightarrow F(U)$ este un difeomorfism și luăm $V = F(U)$.

4.11 Funcții implicite

Definiția 4.11.1 Fie ecuația

$$F(x, y) = 0 \quad (4.41)$$

unde $F : D \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$, $F_i : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. O funcție $y = f(x)$, $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ astfel încât $(x, f(x)) \in D$, se numește soluție în raport cu y a ecuației $F(x, y) = 0$ pe mulțimea A dacă $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in A$.

Observația 4.11.1 Un sistem de m funcții reale $\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$ de n variabile x_1, x_2, \dots, x_n , $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, este o soluție a sistemului de ecuații

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$$

în raport cu variabilele y_1, y_2, \dots, y_m , pe mulțimea A , dacă avem

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) = 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) = 0 \end{cases}$$

$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$.

Definiția 4.11.2 Funcțiile $y = f(x)$ definite cu ajutorul ecuațiilor $F(x, y) = 0$ se numesc funcții implicite.

Ecuațiile de forma (4.41) pot avea una sau mai multe soluții pe o mulțime A sau pot să nu aibă nici o soluție.

Exemplu 4.11.1 1. Ecuația $4x - y^2 = 0$ ($n = m = 1$) are în raport cu y o infinitate de soluții pe mulțimea $[0, \infty)$. Funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \infty$ $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & , \quad x \in A_1 \\ -2\sqrt{x} & , \quad x \in A_2 \end{cases}$, unde $A_1 \cup A_2 = [0, \infty)$, verifică ecuația $4x - y^2 = 0$.

2. Ecuația $2x^2 + 5y^2 + 2 = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nu are nici o soluție reală.

3. Ecuația $x - y^3 = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^3$ are o singură soluție pe \mathbb{R} , funcția $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Ne punem întrebarea în ce condiții ecuația (4.41) are soluție, și dacă această soluție este unică.

Teorema 4.11.1 Teorema funcțiilor implicite, Goursat (1858 - 1936)

Fie $D \subset \mathbb{R}^{m+n}$, $(a, b) \in D$ și funcția $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$, $F \in C^1(D)$. Dacă $F(a, b) = 0$ și $\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}(a, b) \neq 0$, atunci există $A \in \mathcal{V}_a$, $B \in \mathcal{V}_b$ un $A \times B \subset D$ și o unică funcție $f : A \rightarrow B$, $f \in C^1(A)$ astfel încât $f(a) = b$ și $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in A$.

DEMONSTRAȚIE: Considerăm funcția $G : D \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, $G(x, y) = (x, F(x, y))$, $(x, y) \in D$, $G = (G_1, G_2, \dots, G_{n+m})$, adică $G_1(x, y) = x_1, G_2(x, y) = x_2, \dots, G_n(x, y) = x_n, G_{n+1}(x, y) = F_1(x, y), G_{n+m}(x, y) = F_m(x, y)$. Atunci jacobianul funcției G în punctul (a, b) este

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a, b) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(a, b) & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a, b) & \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a, b) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a, b) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(a, b) & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(a, b) & \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a, b) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}(a, b) \neq 0$$

Conform teoremei de inversiune locală există o mulțime deschisă U astfel încât $(a, b) \in U \subset D$, $G(U)$ este mulțime deschisă în \mathbb{R}^{n+m} , iar $G : U \rightarrow G(U) = V$ un difeomorfism. Presupunem mulțimea U de forma $U = U_1 \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, cu $B \in \mathcal{V}_b$.

Definim funcția $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ $H(x) = (x, 0)$ și fie $A = U_1 \cap H^{-1}(V)$. Întrucât $(a, b) \in U = U_1 \times B$ rezultă $a \in U_1$ și $H(a) = (a, 0) = (a, F(a, b)) = G(a, b) \in V$, adică $a \in H^{-1}(V)$, deci $a \in A$.

Avem $A \times B \subset U_1 \times B = U \subset D$ și pentru $\forall x \in A$ $H(x) = (x, 0) \in V$. Astfel putem defini funcția $f : A \times B \rightarrow B$ $f = \text{pr}_2 \circ G^{-1} \circ H$, $A \xrightarrow{H} V \xrightarrow{G^{-1}} U \xrightarrow{\text{pr}_2} B$. Cum funcțiile pr_2, G^{-1} și H sunt funcții de clasă C^1 rezultă $f \in C^1(A)$.

Fie $G^{-1}(x, 0) = (u, v)$; atunci $G(G^{-1}(x, 0)) = G(u, v)$, deci $(x, 0) = (u, F(u, v))$, de unde $x = u$. Pe de altă parte $v = \text{pr}_2(u, v) = \text{pr}_2(G^{-1}(x, 0)) = (\text{pr}_2 \circ G^{-1}H)(x) = f(x)$. Am obținut $G^{-1}(x, 0) = (x, f(x))$. Fie $x \in A$; $G(x, f(x)) = G(G^{-1}(x, 0)) = (x, 0)$. Dar $G(x, f(x)) = (x, F(x, f(x)))$, adică $F(x, f(x)) = 0, \forall x \in A$.

Observația 4.11.2 1. Dacă $F \in C^p(D)$, atunci $f \in C^p(A)$.

2. În condițiile teoremei 4.11.1 au loc următoarele:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = -\frac{\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(x_i, y_2, \dots, y_m)}}{\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i} = -\frac{\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, x_i)}}{\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}}$$

Dacă pentru $x \in A$ în identitățile

$$\begin{cases} F_1(x, f_1(x), \dots, f_m(x)) = 0 \\ F_2(x, f_1(x), \dots, f_m(x)) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ F_m(x, f_1(x), \dots, f_m(x)) = 0 \end{cases}$$

derivăm în raport cu x_i obținem

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_i} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_i} + \frac{\partial F_m}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0. \end{cases}$$

Folosind regula lui Krammer rezultă

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = -\frac{\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(x_i, y_2, \dots, y_m)}}{\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i} = -\frac{\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_{m-1}, x_i)}}{\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}}$$

3. Fie mulțimea $M = \{(x, y) \in D \mid F(x, y) = 0\}$. Teorema funcțiilor implicite stabilește că într-o vecinătate $A \times B$ a oricărui punct fixat $(a, b) \in M$, mulțimea M este local graficul unei funcții. Mulțimea M fiind dată nu poate exista local decât cel mult o funcție astfel încât M să fie graficul lui f . Astfel, local, funcția f este unică pe când deschișii A și B nu sunt unici.

Cazuri particulare ale teoremei funcțiilor implicite

1. Funcția implicită definită de ecuația $F(x, y) = 0$

Teorema 4.11.2 Dacă $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^2$ este o funcție de clasă $C^1(U)$, $(a, b) \in U$ un punct astfel încât $F(a, b) = 0$ și $F'_y(a, b) \neq 0$, atunci

1. Există $A \in \mathcal{V}_a, B \in \mathcal{V}_b, A \times B \subset U$ și o unică funcție $f : A \rightarrow B$ așa încât $f(a) = b$ și $F(x, f(x)) = 0, \forall x \in A$.

2. Funcția $f \in C^1(A)$ și

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \quad \forall x \in A \quad (4.42)$$

3. Dacă $F \in C^p(U)$, atunci $f \in C^p(A), p \geq 1$.

Teorema 4.11.3 Dacă $F : U \rightarrow \mathbb{R}, U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ este o funcție de clasă $C^1(U)$, $(a, b) \in U$ un punct astfel încât $F(a, b) = 0$ și $F'_y(a, b) \neq 0$, atunci

1. Există $A \in \mathcal{V}_a, B \in \mathcal{V}_b, A \times B \subset U$ și o unică funcție $f : A \rightarrow B$ așa încât $f(a) = b$ și $F(x, f(x)) = 0, \forall x \in A$.

2. Funcția $f \in C^1(A)$ și

$$f'(x_i) = -\frac{F'_{x_i}(x, y)}{F'_y(x, y)}, \quad x \in A \quad (4.43)$$

3. Dacă $F \in C^p(U)$, atunci $f \in C^p(A), p \geq 1$.

Observația 4.11.3 1. În ipotezele teoremei 4.11.2, dacă $f \in C^2(U)$ se pot determina punctele de extrem ale funcției implicite $y = y(x)$ definită de relația $F(x, y) = 0$. Întâi se determină din relația (4.42) punctele critice rezolvând sistemul $F(x, y) = 0, F'_x(x, y) = 0, F'_y(x, y) \neq 0$. Derivând (4.42) în raport cu x se obține $F''_{x_2}(x, y) + F''_{xy}(x, y)y'(x) + y''(x)F'_y(x, y) + y'(x)(F''_{xy}(x, y) + F''_{y_2}(x, y)y'(x)) = 0$. Pe urmă se studiază semnul funcției $y''(x) = \frac{F''_{x_2}(x, y)}{F'_y(x, y)}$ în fiecare punct critic obținut.

2. În ipotezele teoremei 4.11.3 pentru $n = 2$ și $F \in C^2(U)$ se pot determina punctele de extrem ale funcției implicite $z = z(x, y)$ definită de relația $F(x, y, z) = 0$. Derivând această ultimă relație în raport cu x și y se obține

$$\begin{aligned} F'_x(x, y, z) + F'_z(x, y, z)z'_x(x, y) &= 0 \\ F'_y(x, y, z) + F'_z(x, y, z)z'_y(x, y) &= 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Se determină din (4.44) punctele critice rezolvând sistemul $F(x, y, z) = 0, F'_x(x, y, z) = 0, F'_y(x, y, z) = 0, F'_z(x, y, z) \neq 0$. Derivând relațiile (4.44) în raport cu x și cu y se obține derivatele $z''_{x^2}, z''_{xy}, z''_{y^2}$. Pentru a determina punctele de extrem se folosește criteriul lui Sylvester.

Exemplu 4.11.2 1. Pentru funcția $y = f(x)$ să se calculeze $f'(0)$ și $f''(0)$, dacă $f(0) = 1$ și $x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$.

Avem $F(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0, F \in C^2(U), F(0, 1) = 0, F'_x(x, y) = -x + 2y - 1, F'_y(1, 0) = 3 \neq 0$, așadar condițiile teoremei (4.11.2) sunt îndeplinite și după formula (4.42) obținem

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{2x - y + 1}{-x + 4y - 1},$$

$f'(0) = 0$. Derivând relația de mai sus în raport cu x se obține

$$f''(x) = -\frac{(2 - y')(-x + 4y - 1) - (2x - y + 1)(-1 + 4y')}{(-x + 4y - 1)^2}, \quad f''(0) = -\frac{2}{3}.$$

2. Pentru funcția $y = f(x)$ să se determine punctele de extrem dacă $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2y - 3 = 0$. Conform punctului 1 al observației (4.11.3) determinăm punctele critice rezolvând sistemul $F(x, y) = 0, F'_x(x, y) = 0, F'_y(x, y) \neq 0$, adică $\begin{cases} x^3 + y^3 - 3x^2y - 3 = 0 \\ 3x^2 - 6xy = 0 \end{cases}$.

Soluțiile acestui sistem sunt $x = 0, y(0) = \sqrt[3]{3}$ și $x = -2, y(-2) = -1$ (se observă că $F'_y(0, \sqrt[3]{3}) \neq 0, F'_y(-2, -1) \neq 0$). Avem $f'(x) = \frac{-x^2 + 2xy}{y^2 - x^2}$,

$f''(x) = \frac{2y^3 + 2x^2y - 2xy^2 + 2xy'(xy - x^2 - y^2)}{(y^2 - x^2)^2}$; $f''(0) = \frac{2}{\sqrt[3]{3}} > 0$, deci $x = 0$ este punct de minim, iar $f''(-2) = -\frac{2}{3} < 0$, deci $x = -2$ este punct de maxim.

3. Pentru funcția $z = f(x, y)$ definită implicit prin $F(x, y, z) = (x + y)e^z - xy - z = 0$, ce satisface condiția $f(2, 2) = 0$ să se calculeze $f'_x(2, 2)$ și $f'_y(2, 2)$.

Se observă că $F(2, 2, 0) = 0, F'_z(2, 2, 0) = 3 \neq 0$, deci sunt îndeplinite condițiile teoremei 4.11.3. Folosind relațiile (4.43) obținem $f'_x(x, y) = -\frac{e^z - y}{(x + y)e^z - 1}, f'_y(x, y) = -\frac{e^z - x}{(x + y)e^z - 1}$, astfel că $f'_x(2, 2) = \frac{1}{3}, f'_y(2, 2) = \frac{1}{3}$.

4. Funcțiile $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sunt definite implicit prin $u + v = x, u - yv = 0$. Să se calculeze diferențialele de ordinul întâi ale celor două funcții.

Avem $F_1(x, y, u, v) = u + v - x = 0, F_2(x, y, u, v) = u - yv = 0$, și presupunem $\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)} =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -y \end{vmatrix} = -y - 1 \neq 0. \text{ Atunci conform observației 4.11.2 obținem}$$

$$u'_x = -\frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, v)}}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -y \end{vmatrix}}{-y - 1} = \frac{y}{y + 1},$$

$$u'_y = -\frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, v)}}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -v & -y \end{vmatrix}}{-y - 1} = \frac{v}{y + 1},$$

$$v'_x = -\frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, x)}}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-y - 1} = \frac{1}{y + 1},$$

$$v'_y = -\frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, y)}}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -v \end{vmatrix}}{-y - 1} = -\frac{v}{y + 1},$$

astfel că

$$du = \frac{1}{y + 1}(ydx + vdy), \quad dv = \frac{1}{y + 1}(dx - vdy).$$

4.12 Extreme cu legături

Fie D o mulțime deschisă din \mathbb{R}^n și funcțiile $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_k : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\Psi_i : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(D)$, $\varphi_k \in C^1(D)$, $\Psi_i \in C^1(D)$, $k = \overline{1, s}$, $i = \overline{1, t}$.

Cu ajutorul acestor funcții definim următoarea submulțime a lui D :

$$U = \{x \in D \mid \varphi_k(x) = 0, \quad \Psi_i(x) \geq 0, \quad k = \overline{1, s}, \quad i = \overline{1, t}\} \quad (4.45)$$

Considerăm restricția lui f la U , $f|_U$ și căutăm punctele de extrem ale acestei restricții.

Definiția 4.12.1 Spunem că $a \in U$ este un punct de extrem pentru f cu legătura U (sau extrem condiționat) dacă a este punct de extrem local pentru $f|_U$.

Observația 4.12.1 $a \in U$ este punct de extrem pentru f cu legătura $U \Leftrightarrow \exists S(a, r) \subset D$ astfel încât $\forall x \in S(a, r) \cap U$ diferența $f(x) - f(a)$ are semn constant.

Definiția 4.12.2 Fie $a \in U$. Un vector $v \in \mathbb{R}^n$ se numește vector admisibil în a dacă există un interval de forma $[0, t_0]$ astfel încât $\forall t \in [0, t_0]$ $a + tv \in U$.

Dacă $a \in U$ este un punct de minim, atunci orice vector de descreștere nu este admisibil.

Dacă în punctul $a \in U$, $\Psi_i(a) = 0$, atunci restricția Ψ_i este activă în a . Notăm $A(a) = \{i \in \overline{1, 2, \dots, t} \mid \Psi_i(a) = 0\}$, adică submulțimea indicilor restricțiilor active în a .

Într-un punct $a \in U$ restricțiile sunt regulate dacă vectorii gradienti ai restricțiilor de tip egalitate și vectorii gradienti ai restricțiilor active sunt liniar independenți.

Restricțiile de tip egalitate și cele active sunt numite legături în punctul a . De aceea în loc de denumirea generală extreme cu restricții vom folosi denumirea extreme cu legături.

Dacă nu avem restricții egalități, iar restricțiile inegalități nu există sau nu sunt active în punctele de extrem, atunci extremele se numesc libere.

Exemplu 4.12.1 Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x-2)^2 + (y-1)^2$ cu restricțiile $\Psi_1(x, y) = x$, $\Psi_2(x, y) = y$, $\Psi_3(x, y) = y - x^2$ și $\Psi_4(x, y) = -x - y + 2$, deci $\Psi_i \geq 0, \forall i = \overline{1, 4}$. Punctele din interiorul și de pe laturile triunghiului curbiliniu satisfac restricțiile problemei. Căutăm punctele de minim ale funcției $f|_U$, unde $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \Psi_i(x, y) \geq 0, i = \overline{1, 4}\}$.

Observăm că $f(x, y) = d((x, y), (2, 1))$, deci f este minim când $d((x, y), (2, 1))$ este minimă. Acest minim este atins în punctul $M(1, 1)$ obținut prin rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ -x - y + 2 = 0 \end{cases}, \text{ adică restricțiile } \Psi_3 \text{ și } \Psi_4 \text{ sunt active.}$$

Cum $\Psi_1(M) = \Psi_2(M) = 1 > 0$ avem $A((1, 1)) = \{3, 4\}$.

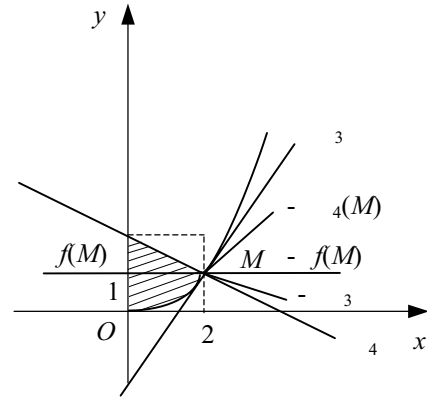


Figura 4.10:

Pentru punctul $(1, 1)$ mulțimea tuturor vectorilor admisibili este cuprinsă între tangenta la parabolă în punctul $M(1, 1)$, $y = 2x - 1$ și restricția activă $x + y = 2$.

Cum $-\nabla f(M)$ este vector de descreștere, nici un vector admisibil nu poate forma cu $-\nabla f(M)$ un unghi mai mic decât 90° , deoarece dacă ar forma atunci f ar descrește, deci punctul $M(1, 1)$ nu ar mai fi punct de minim. Prin urmare $-\nabla f(M)$ trebuie să fie situat în conul generat de $-\nabla \Psi_3(M)$ și $-\nabla \Psi_4(M)$, adică $\exists \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ astfel încât $-\nabla f(M) = \alpha_1(-\nabla \Psi_3(M)) + \alpha_2(-\nabla \Psi_4(M))$, adică $\nabla f(M) = \alpha_1 \nabla \Psi_3(M) + \alpha_2 \nabla \Psi_4(M)$.

Observația 4.12.2 1. Deoarece $\min_{x \in S} f(x) = -\max_{x \in S} (-f(x))$ vom trata doar problema de minim, orice problemă de maxim reducându-se la una de minim.

2. Inegalitățile de forma \geq pot fi transformate în inegalități de forma \leq prin înmulțirea cu (-1) .

3. Inegalitățile de forma \geq sau \leq pot fi transformate în egalități prin scăderea sau adăugarea unei variabile nenegative.

Teorema 4.12.1 Kuhn - Tucher.

Dacă $f, \varphi_k, \Psi_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții definite pe un deschis D din \mathbb{R}^n , $f, \varphi_k, \Psi_i \in C^1(D)$, unde $k = \overline{1, s}$, $i = \overline{1, t}$ și $a \in U$ este punct de minim pentru $f|_U$, iar în a restricțiile sunt regulate, atunci există numerele $u_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, s}$ și $v_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, t}$ astfel încât:

1. $v_i = 0$ pentru orice $i \notin A(a)$;
2. $\nabla f(a) = \sum_{k=1}^s u_k \nabla \varphi_k(a) + \sum_{i=1}^t v_i \nabla \Psi_i(a)$.

DEMONSTRAȚIE: Pentru a simplifica demonstrația putem presupune că punctul a este originea spațiului \mathbb{R}^n , $a = 0_{\mathbb{R}^n}$, făcând o translație a sistemului de referință. De asemenea putem presupune $f(a) = 0$, deoarece, dacă $f(a) = \alpha$, atunci lucrăm cu funcția $g = f - \alpha$, deci facem o translație a valorii funcției.

Presupunem că restricțiile active în punctul a sunt $\Psi_1(0) = 0$, $\Psi_2(0) = 0, \dots, \Psi_j(0) = 0$, deci $A(0) = \{1, 2, \dots, j\}$ și $\Psi_{j+1}(0) > 0, \Psi_{j+2}(0) > 0, \dots, \Psi_t(0) > 0$. Cum $\Psi_i \in C^1(D)$, $i = \overline{1, s}$ există $S(0, r)$ cu următoarele proprietăți: $\forall x \in S(0, r)$, $\Psi_{j+1}(x) > 0, \dots, \Psi_t(x) > 0$ și $\forall x \in S(0, r) \cap U$, $f(x) \geq f(0) = 0$. Arătăm că pentru fiecare $\varepsilon \in (0, r)$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru $\forall x$ cu $\|x\| = \varepsilon$ are loc inegalitatea

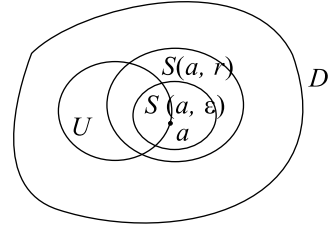


Figura 4.11:

$$f(x) + \|x\|^2 + n_\varepsilon \left[\sum_{k=1}^s \varphi_k^2(x) + \sum_{i=1}^j \Psi_i^*(x) \right] > 0, \quad (4.46)$$

$$\Psi_i^*(x) = \max(-\Psi_i(x), 0).$$

Presupunem prin absurd că afirmația (4.46) este falsă. Atunci $\exists \varepsilon_0 \in (0, r)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_m, \|x_m\| = \varepsilon_0$, astfel ca

$$\begin{aligned} f(x_m) + \|x_m\|^2 + n \left[\sum_{k=1}^s \varphi_k^2(x_m) + \sum_{i=1}^j \Psi_i^{*2}(x_m) \right] &\leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x_m) + \|x_m\|^2 &\leq -n \left[\sum_{k=1}^s \varphi_k^2(x_m) + \sum_{i=1}^j \Psi_i^{*2}(x_m) \right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

Deoarece mulțimea $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = \varepsilon_0\}$ este compactă, fiind închisă și mărginită, iar șirul $(x_m) \subset K$, există un subșir $(x_{h(m)})$ al său convergent în K , unde $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ este o funcție strict crescătoare. Deci există $x^* \in K$ astfel ca $x_{h(m)} \rightarrow x^*$.

(4.47) se poate scrie

$$\frac{f(x_{h(m)}) + \varepsilon_0^2}{-h(m)} \geq \sum_{k=1}^s \varphi_k^2(x_{h(m)}) + \sum_{i=1}^j \Psi_i^{*2}(x_{h(m)}) \quad (4.48)$$

Cum $f, \varphi_k, \Psi_i^* \in C^1(D)$, iar $x_{h(m)} \rightarrow x^*$, avem $f(x_{h(m)}) \rightarrow f(x^*)$, $\varphi_k(x_{h(m)}) \rightarrow \varphi_k(x^*)$, respectiv $\Psi_i(x_{h(m)}) \rightarrow \Psi_i(x^*)$. Trecând la limită în (4.48) rezultă

$$\sum_{k=1}^s \varphi_k^2(x^*) + \sum_{i=1}^j \Psi_i^{*2}(x^*) \leq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^s \varphi_k^2(x^*) + \sum_{i=1}^j \Psi_i^{*2}(x^*) = 0.$$

Deci $\varphi_k(x^*) = 0, k = \overline{1, s}$ și $\Psi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, j} \Rightarrow \Psi_i(x^*) \geq 0, \forall i = \overline{1, j}$ și $\Psi_i(x^*) > 0, \forall i = \overline{j+1, t}$ pentru că $\{x \mid \|x\| = \varepsilon_0\} \subset S(0, r)$.

Astfel, $x^* \in U$ satisface condițiile (4.45), și deci $\lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m) = f(x^*) \geq f(0) = 0$. Dar din (4.47) avem $f(x_{h(m)}) + \|x_{h(m)}\|^2 \leq 0$, adică $f(x_{h(m)}) \leq -\varepsilon \Rightarrow f(x^*) \leq -\varepsilon_0 < 0$, ceea ce este o contradicție. Așadar, afirmația (4.46) este adevărată.

Pentru fiecare $\varepsilon \in (0, r)$ construim funcția $F_\varepsilon : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$F_\varepsilon(x) = f(x) + \|x\|^2 + n_\varepsilon \left[\sum_{k=1}^s \varphi_k^2(x) + \sum_{i=1}^j \Psi_i^{*2}(x) \right]$$

cu n_ε din (4.46) și studiem comportarea acestei funcții pe $\overline{S(0, \varepsilon)}$. Cum $\overline{S(0, \varepsilon)}$ este un compact pe care F_ε este continuă, rezultă că ea este mărginită și își atinge marginile. Fie $x_\varepsilon \in \overline{S(0, \varepsilon)}$

punctul de minim global al lui F_ε pe $\overline{S(0, \varepsilon)}$, adică $F_\varepsilon(x_\varepsilon)$ este cea mai mică valoare pe $\overline{S(0, \varepsilon)}$. Deoarece $F_\varepsilon(0) = 0$ rezultă $F_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq 0$. Dar din (4.46) avem $F_\varepsilon(x) > 0$ pentru $\|x\| = \varepsilon$. Prin urmare, $x_\varepsilon \in S(0, \varepsilon)$ și din teorema lui Fermat avem $\nabla F_\varepsilon(x_\varepsilon) = 0$, adică

$$\frac{\partial f}{\partial x_l}(x_\varepsilon) + 2 \operatorname{pr}_l x_\varepsilon + \sum_{k=1}^s 2n_\varepsilon \varphi_k(x_\varepsilon) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l}(x_\varepsilon) + \sum_{i=1}^j -2\Psi_i^*(x_\varepsilon) \frac{\partial \Psi_i(x_\varepsilon)}{\partial x_l} = 0 \quad (4.49)$$

cu $\|x_\varepsilon\| < \varepsilon$, $l = \overline{1, n}$.

Introducem următoarele notații:

$$L_\varepsilon = 1 + \sum_{k=1}^s [2n_\varepsilon \varphi_k(x_\varepsilon)]^2 + \sum_{i=1}^j [2n_\varepsilon \Psi_i^*(x_\varepsilon)]^2 > 0, \quad \lambda_0^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{L_\varepsilon}} > 0,$$

$$\lambda_k^\varepsilon = \frac{2n_\varepsilon \varphi_k(x_\varepsilon)}{\sqrt{L_\varepsilon}} \quad \text{și} \quad \mu_i^\varepsilon = \frac{-2n_\varepsilon \Psi_i^*(x_\varepsilon)}{\sqrt{L_\varepsilon}} \leq 0, \quad k = \overline{1, s} \quad \text{și} \quad i = \overline{1, j}.$$

Împărțind cele n egalități din (4.49) cu $\sqrt{L_\varepsilon}$, obținem

$$\lambda_0^\varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial x_l}(x_\varepsilon) + 2 \operatorname{pr}_l x_\varepsilon \right) + \sum_{k=1}^s \lambda_k^\varepsilon \frac{\partial \varphi_k(x_\varepsilon)}{\partial x_l} + \sum_{i=1}^j \mu_i^\varepsilon \frac{\partial \Psi_i(x_\varepsilon)}{\partial x_l} = 0, \quad \forall l = \overline{1, n}. \quad (4.50)$$

Putem pune în evidență un versor $(\lambda_0^\varepsilon, \lambda_1^\varepsilon, \dots, \lambda_s^\varepsilon, \mu_1^\varepsilon, \dots, \mu_j^\varepsilon)$. Astfel am găsit că pentru $\forall \varepsilon \in (0, r)$, $\exists x_\varepsilon$ cu $\|x_\varepsilon\| < \varepsilon$ și un versor $(\lambda_0^\varepsilon, \lambda_1^\varepsilon, \dots, \lambda_s^\varepsilon, \mu_1^\varepsilon, \dots, \mu_j^\varepsilon)$ cu $\mu_i^\varepsilon < 0, \forall i = \overline{1, j}$ și $\lambda_0^\varepsilon > 0$ astfel încât să fie satisfăcute egalitățile (4.50).

Considerând $\varepsilon_l = \frac{r}{l}$, obținem un șir de puncte (x_l) cu $\|x_l\| < \frac{r}{l}$ ($x_l \rightarrow 0$) și, corespunzător lui, șirul de versori $(v_l), v_l = (\lambda_{0l}, \lambda_{1l}, \dots, \lambda_{sl}, \mu_{1l}, \dots, \mu_{jl})$ și șirul de numere

$$L_l = 1 + \sum_{k=1}^s [2n_l \varphi_k(x_l)]^2 + \sum_{i=1}^j [2n_l \Psi_i(x_l)]^2.$$

Mulțimea versorilor fiind compactă, șirul (v_l) conține un subșir convergent către un versor $v = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s, \mu_1, \dots, \mu_j)$, $\lambda_0 = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{L_l}} \geq 0$.

Dacă $\lambda_0 = 0$ din ipoteza regularității restricțiilor în 0 rezultă $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = \mu_1 = \dots = \mu_j = 0$, deci v nu este un versor ceea ce este o contradicție. Prin urmare $\lambda_0 > 0$ și $\mu_i = \lim_{l \rightarrow \infty} \mu_{il} \leq 0 \Rightarrow \mu_i \leq 0, \quad i = \overline{1, j}$.

$$\nabla f(0) = \sum_{k=1}^s \frac{-\lambda_k}{\lambda_0} \nabla \varphi_k(0) + \sum_{i=1}^t \frac{-\mu_i}{\lambda_0} \nabla \Psi_i(0), \quad \text{unde} \quad \mu_{j+1} = \dots = \mu_t = 0.$$

Notând $u_k = \frac{-\lambda_k}{\lambda_0} \in \mathbb{R}$ și $v_i = \frac{-\mu_i}{\lambda_0} \geq 0, k = \overline{1, s}, i = \overline{1, t}$ obținem

$$\nabla f(0) = \sum_{k=1}^s u_k \nabla \varphi_k(0) + \sum_{i=1}^t v_i \nabla \Psi_i(0) \quad \text{cu} \quad u_k \in \mathbb{R} \quad \text{și} \quad v_i \in \mathbb{R}_+.$$

Observația 4.12.3 1. Cu ajutorul funcțiilor f, φ_k și Ψ_i construim funcția $\Phi : D \times \mathbb{R}^{s+2t} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Phi = f - \sum_{k=1}^s u_k \varphi_k - \sum_{i=1}^t v_i (\Psi_i - w_i^2),$$

unde u_k sunt multiplicatori Lagrange, v_i sunt multiplicatori Kuhn-Tucker, iar w_i sunt variabile de egalizare. Φ este o funcție de $n + s + 2t$ variabile: x_l, v_k, v_i, w_i , unde $l = \overline{1, n}, k = \overline{1, s}, i = \overline{1, t}$.

Teorema lui Kuhn-Tucker afirmă că punctele din minim ale funcției f trebuie căutate printre punctele critice ale lui Φ , adică printre soluțiile sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} = 0 & , \quad l = \overline{1, n} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} = 0 & , \quad k = \overline{1, s} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 0 & , \quad i = \overline{1, t} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial w_i} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} &= \frac{\partial f}{\partial x_l} - \sum_{k=1}^s u_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} - \sum_{i=1}^t v_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_l} = 0, \quad l = \overline{1, n} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} &= -\varphi_k = 0, \quad k = \overline{1, s} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} &= -(\Psi_i - w_i^2) = 0, \quad i = \overline{1, t} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial w_i} &= 2v_i w_i = 0 \end{aligned}$$

Să simplificăm puțin și să lucrăm numai cu restricții de tip egalitate. Atunci $\Phi = f - \sum_{k=1}^s u_k \varphi_k$ și căutăm punctele critice ale funcției Φ rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} = 0, \quad l = \overline{1, n} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} = 0, \quad k = \overline{1, s} \end{cases}$$

2. Presupunem că nu avem restricții egalități, iar restricțiile inegalități sunt de forma $x_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$ și $\Psi_i(x_1, \dots, x_n) \geq 0$, $i = \overline{1, t}$. Notăm

$$L = f - \sum_{i=1}^t v_i \Psi_i, \quad \text{și} \quad \Phi = L - \sum_{j=1}^n v_j x_j + \sum_{j=1}^t v_j w_j^2 + \sum_{i=1}^t v_i w_i^2$$

Atunci

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} &= \frac{\partial L}{\partial x_j} - v_j = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_j} &= w_j^2 - x_j = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} &= w_i^2 - \Psi_i = 0 & j = \overline{1, n}, i = \overline{1, t} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial w_j} &= 2v_j w_j = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial w_i} &= 2v_i w_i = 0 \end{aligned}$$

Observăm că $x_j = 0 \Leftrightarrow w_j = 0$, iar $\Psi_i = 0 \Leftrightarrow w_i = 0$. Acestea ne permit să eliminăm variabilele ajutoare w_i, w_j , astfel ca să avem

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = v_j, \quad x_j \geq 0, \quad v_j x_j = 0, \quad \Psi_i \geq 0, \quad v_i \Psi_i = 0.$$

Deci, dacă există minimul funcției f cu restricțiile $x_j \geq 0, j = \overline{1, n}, \Psi_i \geq 0, i = \overline{1, t}$, atunci sunt satisfăcute următoarele condiții:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j} \geq 0, & x_j \geq 0, & x_j \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, & j = \overline{1, n} \\ \frac{\partial L}{\partial v_i} \leq 0, & v_i \geq 0, & v_i \frac{\partial L}{\partial v_i} = 0, & i = \overline{1, t}, \end{cases}$$

unde $L = f - \sum_{i=1}^t v_i \Psi_i$ se numește funcție Lagrange.

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^t v_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} \quad \text{și} \quad \frac{\partial L}{\partial v_i} = -\Psi_i, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, t}.$$

În continuare stabilim condiții suficiente pentru existența punctelor de minim cu legături.

Teorema 4.12.2 *Presupunem că funcțiile $f, \varphi_k, \Psi_i \in C^2(D), k = \overline{1, s}, i = \overline{1, t}$. Dacă $a \in U$ și sunt satisfăcute următoarele condiții:*

1. *Restricțiile sunt regulate în a ;*
2. *Există numerele $u_k \in \mathbb{R}$ și $v_i \in \mathbb{R}_+$ astfel ca $v_i = 0$ pentru $i \notin A(a)$ și*

$$\nabla f(a) = \sum_{k=1}^s u_k \nabla \varphi_k(a) + \sum_{i=1}^t v_i \nabla \Psi_i(a);$$

3. *Dacă definim funcția $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ prin $\Phi = f - \sum_{k=1}^s u_k \varphi_k - \sum_{i=1}^t v_i \Psi_i$, iar $d^2 \Phi(a)(h) = 0$ pentru $\forall h \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ care satisface $\begin{cases} d\varphi_k(a)(h) = 0 \\ d\Psi_i(a)(h) = 0 \end{cases}, k = \overline{1, s}, i \in A_+(a) = \{i \in A(a) \mid v_i > 0\}$, atunci a este punct de minim pentru $f|_U$.*

DEMONSTRAȚIE: Presupunem că deși aceste condiții sunt satisfăcute într-un punct $a \in U$, a nu este punct de minim pentru $f|_U$. Atunci pentru $\forall S(a, r), \exists x \in S(a, r) \cap U$ astfel încât $f(x) < f(a)$. Dacă $r = \frac{1}{n}$, atunci există un șir (x_m) din \mathbb{R}^n ce verifică proprietățile $x_m \in U, \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = a, f(x_m) < f(a), \varphi_k(x_m) = 0$ și $\Psi_i(x_m) \geq 0, \forall k = \overline{1, s}, \forall i = \overline{1, t}$.

Notând $h_m = \frac{x_m - a}{\|x_m - a\|}, h_m \in \overline{S(0, 1)}$, care este mulțime compactă, deci șirul (h_m) conține un subșir convergent; există $h \in \overline{S(0, 1)}, h \neq 0$, astfel ca $h_{g(m)} \rightarrow h$, unde $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ este o funcție strict crescătoare.

Pe de altă parte, din ipoteza 2 a teoremei avem:

$$\langle \nabla f(a), h \rangle = \sum_{k=1}^s u_k \langle \nabla \varphi_k(a), h \rangle + \sum_{i \in A_+(a)} v_i \langle \nabla \Psi_i(a), h \rangle,$$

adică

$$df(a)(h) = \sum_{k=1}^s u_k d\varphi_k(a)(h) + \sum_{i \in A_+(a)} v_i d\Psi_i(a)(h).$$

Deoarece $x_m \in U \Rightarrow \varphi_k(x_m) = 0$ de unde $\varphi_k(a) = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x_m \rightarrow a} \frac{1}{\|x_m - a\|} [\varphi_k(x_m) - \varphi_k(a) - d\varphi_k(a)(x_m - a)] &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x_m \rightarrow a} d\varphi_k(a) \left(\frac{x_m - a}{\|x_m - a\|} \right) &= 0 \Rightarrow \lim_{x_m \rightarrow a} d\varphi_k(a)(h_m) = 0 \Rightarrow d\varphi_k(a)(h) = 0, \end{aligned}$$

deci h verifică ecuația $d\varphi_k(a)(h) = 0$.

$$\lim_{x_m \rightarrow a} \frac{1}{\|x_m - a\|} [\Psi_i(x_m) - \Psi_i(a) - d\Psi_i(a)(x_m - a)] = 0$$

Notând

$$\frac{1}{\|x_m - a\|} [\Psi_i(x_m) - \Psi_i(a) - d\Psi_i(a)(x_m - a)] = \alpha(x_m),$$

avem

$$d\Psi_i(a)(x_m - a) + \alpha(x_m)\|x_m - a\| = \Psi_i(x_m) - \Psi_i(a) \geq 0, \quad (4.51)$$

deoarece din $x_m \in U$, rezultă $\Psi_i(x_m) \geq 0$ și, pentru că $i \in A_+(a)$, $\Psi_i(a) = 0$. Astfel din (4.51) obținem:

$$\|x_m - a\| [d\Psi_i(a)(h_m) + \alpha(x_m)] \geq 0 \Rightarrow d\Psi_i(a)(h_m) + \alpha(x_m) \geq 0$$

și trecând la limită, rezultă $d\Psi_i(a)(h) \geq 0$, $i \in A(a)$.

Presupunem că nu toate $d\Psi_i(a)(h) = 0$ pentru $i \in A_+(a)$. Cum $df(a)(h) = \sum_{i \in A_+(a)} v_i d\Psi_i(a)(h)$, rezultă $df(a)(h) > 0$. Funcția f fiind diferențiabilă în a , avem:

$$f(x_m) = f(a) + df(a)(x_m - a) + \|x_m - a\|\beta(x_m) \quad \text{cu} \quad \lim_{x_m \rightarrow a} \beta(x_m) = 0,$$

$$f(x_m) - f(a) = \|x_m - a\|[df(a)(h_m) + \beta(x_m)].$$

Cum $\lim_{x_m \rightarrow a} \beta(x_m) = 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ astfel ca $\forall m \geq n_1 \quad df(a)(h_m) + \beta(x_m) > 0$, de unde $f(x_m) > f(a)$ ceea ce contrazice alegerea șirului (x_m) . Așadar, $d\Psi_i(a)(h) = 0$. Cum h găsit verifică condițiile $h \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, $d\varphi_k(a)(h) = 0$ și $d\Psi_i(a)(h) = 0$, $k = \overline{1, s}$, $i \in A_+(a)$, obținem din condiția 3 din ipoteza teoremei $d\Phi(a)(h) = 0$.

Formula lui Taylor aplicată funcției Φ ne dă

$$\Phi(x_m) = \Phi(a) + d\Phi(a)(x_m - a) + \frac{1}{2!} d^2\Phi(r_m)(x_m - a), \quad (4.52)$$

unde r_m este cuprins între a și x_m .

Observăm că $\Phi(a) = f(a)$ și $f(a) = \sum_{k=1}^s u_k d\varphi_k(a) + \sum_{i \in A_+(a)} v_i d\Psi_i(a)$.

Fără a restrânge generalitatea putem presupune $n = 2$, $a = (x_0, y_0)$, $r = (\xi, \eta)$. Atunci

$$\begin{aligned} &\Phi''_{x_2}(r)(x - x_0)^2 + 2\Phi''_{xy}(r)(x - x_0)(y - y_0) + \Phi''_{y_2}(r)(y - y_0)^2 = \\ &= \Phi''_{x_2}(a)(x - x_0)^2 + 2\Phi''_{xy}(a)(x - x_0)(y - y_0) + \Phi''_{y_2}(a)(y - y_0)^2 + \\ &+ [\Phi''_{x_2}(r) - \Phi''_{x_2}(a)](x - x_0)^2 + 2[\Phi''_{xy}(r) - \Phi''_{xy}(a)](x - x_0)(y - y_0) + \\ &+ [\Phi''_{y_2}(r) - \Phi''_{y_2}(a)](y - y_0)^2. \end{aligned}$$

Astfel relația (4.52) devine

$$\Phi(x_m) = \Phi(a) + \frac{1}{2!} d^2\Phi(a) \left(\frac{x_m - a}{\|x_m - a\|} \right) \|x_m - a\|^2 + \gamma(x_m) \|x_m - a\|^2,$$

cu $\lim_{x_m \rightarrow a} \gamma(x_m) = 0$. Avem

$$\Phi(x_m) = \Phi(a) + \|x_m - a\|^2 \left[\frac{1}{2} d^2\Phi(a)(h_m) + \gamma(x_m) \right],$$

$\lim_{h_m \rightarrow h} d^2\Phi(a)(h_m) = d^2\Phi(a)(h) > 0$. Atunci $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ astfel ca $\forall m \geq n_2$, $\Phi(x_m) > \Phi(a)$. Dar $f(x_m) \geq \Phi(x_m) > \Phi(a) = f(a)$, ceea ce contravine presupunerii noastre. Astfel, afirmația din teoremă este adevărată.

Observația 4.12.4 *Problemele de maxim se tratează în mod analog.*

Exemplu 4.12.2 1. *Să se demonstreze următoarea inegalitate:*

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \geq \left[\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right]^2.$$

Căutăm minimul funcției $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}$ cu restricția $x_1 + x_2 + \dots + x_n = A$.

Considerăm funcția Lagrange:

$$\Phi = f - u(x_1 + x_2 + \dots + x_n - A) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - u(x_1 + x_2 + \dots + x_n - A).$$

Avem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{n} - u = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u} = A - (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 0.$$

Rezultă deci $x_i = \frac{un}{2}$, $A - \frac{un^2}{2} = 0 \Rightarrow u = \frac{2A}{n^2}$, prin urmare,

$$\Phi = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \frac{2A}{n^2}(x_1 + x_2 + \dots + x_n - A).$$

Pe de altă parte,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = \frac{2}{n}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad \forall i \neq j,$$

de unde $d^2\Phi > 0$, deci $x_i = \frac{A}{n}$ este un punct de minim al funcției f , așadar,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f\left(\frac{A}{n}, \frac{A}{n}, \dots, \frac{A}{n}\right) = \frac{n \frac{A^2}{n^2}}{n} = \left(\frac{A}{n}\right)^2,$$

adică

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \geq \left[\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right]^2.$$

2. Să se determine minimul funcției $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 2x - 4y$$

cu restricțiile: $\begin{cases} -2x - y + 7 \geq 0 \\ -x - 2y + 5 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Considerăm funcția

$$L = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 2x - 4y - v_1(-2x - y + 7) - v_2(-x - 2y + 5).$$

Dacă există minimumul funcției f , acesta verifică următorul sistem de condiții:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = x - 2 + 2v_1 + v_2 \geq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = y - 4 + v_1 + 2v_2 \geq 0 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ x \frac{\partial L}{\partial x} = x(x - 2 + 2v_1 + v_2) = 0 \\ y \frac{\partial L}{\partial y} = y(y - 4 + v_1 + 2v_2) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial v_1} = 2x + y - 7 \leq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial v_2} = x + 2y - 5 \leq 0 \\ v_1 \geq 0 \quad v_2 \geq 0 \\ v_1 \frac{\partial L}{\partial v_1} = v_1(2x + y - 7) = 0 \\ v_2 \frac{\partial L}{\partial v_2} = v_2(x + 2y - 5) = 0 \end{array} \right.$$

Rezolvând sistemul, găsim printre alte soluții și soluția: $x = 1, y = 2, v_1 = 0, v_2 = 1$. Atunci funcția Φ este $\Phi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 2x - 4y - (-x - 2y + 5)$. Restricția $\Psi(x, y) = -x - 2y + 5$ este activă; $\nabla f(1, 2) = -\vec{i} - 2\vec{j}$, $\nabla \Psi(1, 2) = -\vec{i} - 2\vec{j}$ de unde $\nabla f(1, 2) = \nabla \Psi(1, 2)$.

$$\begin{aligned} d\Psi(1, 2)(h) &= 0 \Rightarrow dx + 2dy = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= x - 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 1, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= y - 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned}$$

Atunci $d^2\Phi(1, 2) = dx^2 + dy^2 = 4dy^2 + dy^2 = 5dy^2 > 0$, deoarece $dx = -2dy$. Am obținut astfel că punctul $(1, 2)$ este punct de minim.

4.13 Metoda celor mai mici pătrate pentru aproximarea unei funcții

Presupunem că avem dată o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care cunoaștem anumite valori într-un număr finit de puncte, date de următorul tabel:

x	x_1	x_2	\dots	x_n
$f(x)$	y_1	y_2	\dots	y_n

Considerăm funcția $\Phi(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$, $x \in [a, b]$, $p < n$. Dacă aproximăm funcția f prin Φ , atunci erorile obținute în punctele x_i sunt $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = y_i - \Phi(x_i; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$. Există situații când este bine să știm cât de mult diferă graficul funcției f de graficul funcției Φ .

Metoda celor mai mici pătrate constă în determinarea parametrilor $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ astfel încât funcția $E = E(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$, care se numește abaterea medie pătratică, să fie minimă. Cea mai întâlnită situație este aceea, când Φ este o combinație liniară de funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, adică $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\Phi(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_p \varphi_p(x).$$

Abaterea medie pătratică este

$$E = \sum_{i=1}^n [y_i - \alpha_1 \varphi_1(x_i) - \alpha_2 \varphi_2(x_i) - \dots - \alpha_p \varphi_p(x_i)]^2.$$

Condițiile necesare de extrem sunt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \alpha_j} &= -2 \sum_{i=1}^n [y_i - \alpha_1 \varphi_1(x_i) - \alpha_2 \varphi_2(x_i) - \dots - \alpha_p \varphi_p(x_i)] \varphi_j(x_i) = \\ &= 2 \left[\alpha_1 \sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i) \varphi_j(x_i) + \alpha_2 \sum_{i=1}^n \varphi_2(x_i) \varphi_j(x_i) + \dots + \alpha_p \sum_{i=1}^n \varphi_p(x_i) \varphi_j(x_i) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^n y_i \varphi_j(x_i) \right] = 0, \quad j = \overline{1, p}. \end{aligned}$$

Presupunem că acest sistem admite cel puțin o soluție. Avem

$$\begin{aligned} d^2 E &= \sum_{j,k=1}^p \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} d\alpha_j d\alpha_k = 2 \sum_{j,k=1}^p \left(\sum_{i=1}^n \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i) \right) d\alpha_j d\alpha_k = \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p \varphi_j(x_i) d\alpha_j \right)^2 > 0, \end{aligned}$$

deci $d^2 E$ este pozitiv definită și, conform teoremei 4.12.2, orice punct critic al funcției E este punct de minim.

Exemplu 4.13.1 Fie funcția $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care cunoaștem următoarele valori:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	1	-1	1

Vrem să aproximăm funcția f printr-o combinație liniară de $\varphi_1(x) = \sin x, \varphi_2(x) = \cos x$. Atunci $\Phi(x; \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x$, iar abaterea medie pătratică este

$$\begin{aligned} E &= (1 - \alpha_1 \sin 0 - \alpha_2 \cos 0)^2 + \left(-1 - \alpha_1 \sin \frac{\pi}{4} - \alpha_2 \cos \frac{\pi}{4}\right)^2 + \\ &\quad + \left(1 - \alpha_1 \sin \frac{\pi}{2} - \alpha_2 \cos \frac{\pi}{2}\right)^2 = \\ &= (1 - \alpha_2)^2 + \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\right]^2 + (1 - \alpha_1)^2; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_1} = \sqrt{2} \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\right] - 2(1 - \alpha_1) = 3\alpha_1 + \alpha_2 - 2 + \sqrt{2} = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_2} = -2(1 - \alpha_2) + \sqrt{2} \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\right] = \alpha_1 + 3\alpha_2 - 2 + \sqrt{2} = 0.$$

Rezolvând acest sistem obținem $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$. Funcția care aproximează pe f este $\Phi(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)(\sin x + \cos x)$ cu eroarea pătratică $E = \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{2}$.

2. Să se aproximeze funcția $f : [1, 9] \rightarrow \mathbb{R}$ printr-o dreaptă, dacă cunoaștem anumite valori ale funcției f date în următorul tabel:

x	1	3	4	6	8	9
$f(x)$	1	2	4	4	5	3

Deci $\Phi(x, \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 x + \alpha_2$. Abaterea medie pătratică este $E = (1 - \alpha_1 - \alpha_2)^2 + (2 - 3\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (4 - 4\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (4 - 6\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (5 - 8\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (3 - 9\alpha_1 - \alpha_2)^2$;

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_1} = 207\alpha_1 + 31\alpha_2 - 114 = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_2} = 31\alpha_2 + 6\alpha_2 - 19 = 0$$

Rezolvând acest sistem obținem $\alpha_1 = \frac{95}{281}, \alpha_2 = \frac{399}{281}$ și deci $y = \Phi = \frac{19}{281}(5x + 21)$.

Presupunem că $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă și $\Phi(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p), x \in [a, b]$ o familie de funcții reale continue ce aproximează pe f . Rezultă atunci că eroarea pătratică (abaterea pătratică) $E = \int_a^b \varepsilon^2 dx$, unde $\varepsilon = \varepsilon(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = f(x) - \Phi(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ este eroarea rea-

lizată prin aproximare. Vrem să determinăm parametrii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ astfel încât abaterea pătratică să fie minimă. La fel vom presupune că Φ este o combinație liniară de funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, adică $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ astfel ca $\Phi(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_p \varphi_p(x)$. Abaterea pătratică este

$$E = \int_a^b [f(x) - \alpha_1 \varphi_1(x) - \alpha_2 \varphi_2(x) - \dots - \alpha_p \varphi_p(x)]^2 dx.$$

Condițiile necesare de extrem sunt date de următorul sistem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \alpha_j} = & 2 \left[\alpha_1 \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_j(x) dx + \alpha_2 \int_a^b \varphi_2(x) \varphi_j(x) dx + \cdots + \right. \\ & \left. + \alpha_p \int_a^b \varphi_p(x) \varphi_j(x) dx - \int_a^b f(x) \varphi_j(x) dx \right] = 0, \quad j = \overline{1, p}. \end{aligned}$$

Presupunem că acest sistem admite cel puțin o soluție. Avem

$$\begin{aligned} d^2 E &= \sum_{j,k=1}^p \frac{\partial^2 E}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} d\alpha_j d\alpha_k = 2 \sum_{j,k=1}^p \left[\int_a^b \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx \right] d\alpha_j d\alpha_k = \\ &= 2 \int_a^b \left[\sum_{j=1}^p \varphi_j(x) d\alpha_j \right]^2 dx > 0, \end{aligned}$$

deci $d^2 E$ este pozitiv definită și, conform teoremei 4.12.2, orice punct critic al funcției E este punct de minim.

Exemplu 4.13.2 1. Fie $y = \sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Să se aproximeze această funcție printr-o combinație liniară a funcțiilor $\varphi_1(x) = 1$ și $\varphi_2(x) = x$.

Avem $\Phi(x; \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x$ și $E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin x - \alpha_1 - \alpha_2 x]^2 dx$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \alpha_1} &= 2 \left[\alpha_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \alpha_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \right] = \pi \alpha_1 + \frac{\pi^2}{2} \alpha_2 - 2 = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial \alpha_2} &= 2 \left[\alpha_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \alpha_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \right] = \frac{\pi^2}{4} \alpha_1 + \frac{\pi^3}{12} \alpha_2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Rezolvând sistemul, obținem $\alpha_1 = \frac{4(6-\pi)}{\pi^2}$, $\alpha_2 = \frac{12(\pi-4)}{\pi^3}$, iar funcția care aproximează pe y este $\Phi(x) = \frac{4(6-\pi)}{\pi^2} + \frac{12(\pi-4)}{\pi^3} x$.

4.14 Metoda gradientului

Fie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă $C^1(A)$, $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n$ și $a \in A$. Dacă a nu este un punct critic al funcției f , atunci cel puțin una dintre derivatele $f'_{x_k}(a) \neq 0$, $k = \overline{1, n}$, adică vectorul $\text{grad } f(a) \neq 0$. Maximul, respectiv minimul derivatei $\frac{df}{ds} \neq 0$ sunt atinse atunci când s este versorul gradientului lui f în a . Avem

$$\frac{df}{ds}(a) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a) s_i, \quad s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$$

și notând $\alpha_i = f'_{x_i}(a)$, $i = \overline{1, n}$ trebuie să determinăm extremele funcției $g(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i$ cu legătura $s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_n^2 = 1$. Atunci versorul s este coliniar cu vectorul $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) =$

$\text{grad } f(a)$. Dacă notăm $g_a = \frac{\text{grad } f(a)}{\|\text{grad } f(a)\|}$, atunci $s = \pm g_a$.

$$\begin{aligned} \max \frac{df}{ds}(a) &= \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a) \frac{f'_{x_i}(a)}{\|\text{grad } f(a)\|} = \frac{1}{\|\text{grad } f(a)\|} \sum_{i=1}^n f_{x_i}^2(a) = 1, \\ \min \frac{df}{ds}(a) &= \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a) \frac{-f'_{x_i}(a)}{\|\text{grad } f(a)\|} = -1 \end{aligned}$$

Definiția 4.14.1 Fie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă $C^1(A)$, $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n$ și $a \in A$, $\text{grad } f(a) \neq 0$. Se numește *traietorie de gradient* pornind din a orice funcție $g : I \rightarrow A$, $g \in C^1(I)$, unde I este un interval astfel încât $0 \in I$, $g(0) = a$, $g'(t) = \text{grad } f(g(t))$, $\forall t \in I$.

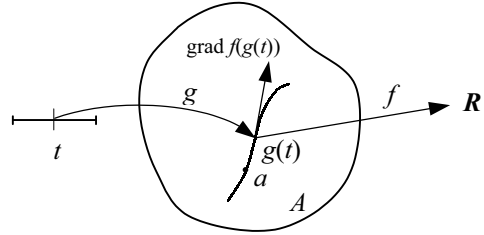


Figura 4.12:

Considerăm $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ o traietorie de gradient și $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ $h(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$, $\forall t \in I$.

Atunci $h \in C^1(I)$ și

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'_{x_1}(g(t))g'_1(t) + \dots + f'_{x_n}(g(t))g'_n(t), \\ g'(t) &= (g'_1(t), \dots, g'_n(t)) = (f'_{x_1}(g(t)), \dots, f'_{x_n}(g(t))) \\ h'(t) &= f_{x_1}^2(g(t)) + \dots + f_{x_n}^2(g(t)) = \|\text{grad } f(g(t))\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Așadar funcția h este monoton crescătoare, adică valorile lui f cresc în lungul oricărei traietorii de gradient și descresc în cazul când $g'(0) = -\text{grad } f(a)$.

Teorema 4.14.1 Presupunem intervalul I de forma $I = (t_0, \infty)$ și că există limita $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = b \in A$. Atunci b este un punct critic al funcției f .

DEMONSTRAȚIE: Presupunem că b nu este punct critic al funcției f , adică $\text{grad } f(b) \neq 0$.

Fie $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ $h(t) = f(g(t))$, $\forall t \in I$, $h \in C^1(I)$. Avem $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(g(t)) = f(b)$ și $h'(t) = \|\text{grad } f(g(t))\|^2$. Deoarece $f \in C^1(A)$, rezultă că $\text{grad } f \in C^0(A)$, prin urmare, $\exists m > 0$ și $V \in \mathcal{V}_b$ astfel încât $\|\text{grad } f(x)\|^2 > m$, $\forall x \in V$.

Alegem punctul $t_1 \in I$ astfel ca $g(t) \in A$, $\forall t \geq t_1$ și avem

$$\int_{t_1}^t h'(t)dt = h(t) - h(t_1). \quad (4.53)$$

Pe de altă parte

$$\int_{t_1}^t h'(t)dt = \int_{t_1}^t \|\text{grad } f(g(t))\|^2 dt \geq \int_{t_1}^t m^2 dt = m^2(t - t_1) \quad (4.54)$$

Din relațiile (4.53) și (4.54) se obține $h(t) \geq h(t_1) + m^2(t - t_1)$, de unde rezultă $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$ ceea ce contrazice faptul că $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = f(b)$.

Observația 4.14.1 1. Dacă funcția f este de clasă $C^2(A)$ și $b \in A$ este un punct de maxim pentru f , atunci există $V \in \mathcal{V}_b$ astfel încât orice traiectorie de gradient care trece printr-un punct din V converge către b .

2. Fie $x_0 \in A$ un punct fixat și construim un șir de puncte din $A, (x_n)$, astfel: $x_1 = x_0 - \alpha_1 \text{grad} f(x_0), \dots, x_n = x_{n-1} - \alpha_{n-1} \text{grad} f(x_{n-1}), \dots, x \rightarrow b$.

Exemplu 4.14.1 Utilizând metoda gradientului să se determine minimul funcției $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$. Observăm că $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y + 2)^2$, astfel că punctul de minim este $x = 1, y = -2$, iar $\min f = 0$. Alegem punctul inițial $x_1 = 2, y_1 = 4$; $\text{grad} f(x, y) = 2(x-1)\bar{i} + 2(y+2)\bar{j}$, $\text{grad}(2, 4) = 2\bar{i} + 12\bar{j} \neq 0$. Punem $x_2 = x_1 - \alpha_1 f'_x(x_1, y_1) = 2 - 2\alpha_1, y_2 = y_1 - \alpha_1 f'_y(x_1, y_1) = 4(1 - 3\alpha_1)$; $f(x_2, y_2) = 37(1 - 2\alpha_1)^2$ are un punct de minim $\alpha_1 = \frac{1}{2}$. Rezultă $x_2 = 1, y_2 = -2$ și deoarece $\text{grad} f(1, -2) = 0$, punctul $(1, -2)$ este punct critic al funcției f . Pe de altă parte $d^2 f(1, -2) = 2(dx^2 + dy^2) > 0$, deci $(1, -2)$ este punct de minim.

Capitolul 5

Serii numerice

5.1 Serii numerice

Există cazuri când unui șir (a_n) de numere i se poate atribui o sumă. Pornind de la noțiunile de șiruri, șiruri convergente, operații cu șiruri, etc. ne punem problema extinderii acestor noțiuni în cazul sumelor unor mulțimi infinite.

Pe teoria seriilor se bazează diverse metode numerice, de exemplu construirea tabelelor de logaritmi și de funcții trigonometrice, precum și calculul anumitor constante importante ca e și π .

Definiția 5.1.1 Fie (a_n) un șir de numere reale. Perechea de șiruri $((a_n), (s_n))$, unde $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ se numește serie de termen general a_n .

Dacă $((a_n), (s_n))$ este o serie de termen general a_n , atunci vom nota această pereche prin $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ sau $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sau $\sum_{n \geq 0} a_n$.

Șirul (s_n) definit mai sus se numește șirul sumelor parțiale asociat șirului (a_n) .

Observația 5.1.1

$$\begin{aligned} 1. \quad s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\dots\dots\dots \\ s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

2. O serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este bine determinată de șirul sumelor parțiale asociat; astfel, studiul seriei se reduce la studiul șirului (s_n) . Într-adevăr, dacă se consideră un șir putem forma o serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ ale cărei sume parțiale să fie (s_n) în felul următor:

$$\begin{aligned} a_0 &= s_0 \\ a_1 &= s_1 - s_0 \\ a_2 &= s_2 - s_1 \\ &\dots\dots\dots \\ a_n &= s_n - s_{n-1} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Definiția 5.1.2 *Seria de numere reale $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ se numește convergentă dacă șirul sumelor parțiale (s_n) este convergent. În acest caz, numărul $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ se numește suma seriei și se notează $s = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$.*

Dacă șirul (s_n) al sumelor parțiale nu are limită sau are limita infinită, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ se numește divergentă.

Observația 5.1.2 1. *În caz de convergență a seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$, avem:*

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

2. *Dacă șirul (s_n) al sumelor parțiale nu are limită atunci spunem că seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este oscilantă.*

Exemplu 5.1.1 1. *Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ este convergentă și are suma egală cu 1, deoarece:*

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1.$$

2. *Seria $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ este divergentă, fiindcă:*

$$s_n = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - 1 \rightarrow \infty.$$

3. *Seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1}$ este oscilantă, deoarece:*

$$s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \text{ impar} \\ 0, & \text{dacă } n \text{ par} \end{cases}, \text{ iar } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \text{ nu există.}$$

Definiția 5.1.3 *Prin natura unei serii $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ se înțelege proprietatea ei de a fi convergentă sau divergentă.*

Observația 5.1.3 *Fie seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$.*

1. *Dacă se schimbă ordinea unui număr finit de termeni ai seriei se obține o nouă serie, care are aceeași natură cu seria inițială. În caz de convergență, suma seriei obținute coincide cu suma seriei inițiale.*

Dacă se schimbă ordinea unui număr infinit de termeni ai seriei, afirmația precedentă nu este, în general, valabilă.

2. *Dacă adăugăm sau ștergăm un număr finit de termeni la o serie dată, atunci seria obținută are aceeași natură cu seria inițială. În caz de convergență, suma seriei obținute va fi egală cu suma seriei date la care se adună sau scade suma termenilor adăugați sau șterși.*

Într-adevăr, dacă a_0, a_1, \dots, a_p sunt termeni șterși, atunci seria obținută are sumele parțiale $t_n = s_n - s_p$, $n \geq p+1$, unde s_n sunt sumele parțiale asociate seriei date. Șirul (t_n) este convergent \Leftrightarrow șirul (s_n) este convergent.

3. Considerăm seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ construită astfel: se aranjează toți termenii seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ în grupe, în fiecare grupă aflându-se un număr finit de termeni consecutivi și se efectuează suma termenilor în fiecare grupă. Seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ este seria acestor sume.

Dacă seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă, atunci și seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ este convergentă. Dacă seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este divergentă, dar nu oscilantă, atunci la fel este și seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$. Dacă seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este oscilantă, atunci nu rezultă neapărat că seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ este și ea oscilantă. De exemplu, seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1}$ este oscilantă, dar seria $\sum_{n \geq 1} b_n$, unde $b_n = a_n + a_{n+1} = 0$, $\forall n \geq 1$ este convergentă și are suma 0.

Teorema 5.1.1 Seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$, $q \in \mathbb{R}$ este convergentă și are suma $\frac{1}{1-q}$ dacă $|q| < 1$ și este divergentă dacă $|q| \geq 1$.

DEMONSTRAȚIE:

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & \text{dacă } q \neq 1 \\ n+1, & \text{dacă } q = 1 \end{cases}$$

Șirul s_n este convergent $\Leftrightarrow |q| < 1$, în care caz $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1-q}$ reprezintă suma seriei.

Definiția 5.1.4 Seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$, $q \in \mathbb{R}$ se numește seria geometrică de rație q .

5.2 Proprietăți ale seriilor numerice și ale sumelor parțiale

Observația 5.2.1 Dacă seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă, atunci șirul (s_n) al sumelor parțiale este mărginit.

DEMONSTRAȚIE: Seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă \Leftrightarrow șirul (s_n) al sumelor parțiale este convergent \Rightarrow șirul (s_n) este mărginit.

Observația 5.2.2 Reciproca observației 5.2.1 este, în general, falsă după cum se observă din următorul exemplu; seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1}$ deși are șirul sumelor parțiale 1, 0, 1, 0 ... mărginit este divergentă.

Teorema 5.2.1 Criteriul necesar de convergență

1. Dacă seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă, atunci $a_n \rightarrow 0$;
2. Dacă $a_n \not\rightarrow 0$, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este divergentă.

DEMONSTRAȚIE: 1. $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ convergentă \Rightarrow șirul (s_n) al sumelor parțiale convergent, $s_n \rightarrow s$, $s \in \mathbb{R}$; $a_n = s_{n+1} - s_n \rightarrow 0$.

2. Rezultă din 1. și din $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$.

Observația 5.2.3 Reciproca afirmației 1 a teoremei 5.2.1 este, în general, falsă. Considerând seria armonică $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$, șirul $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Aranjăm termenii seriei în grupe finite astfel:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \\ &+ \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) + \cdots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{2^n} &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) > \\
&> \frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} > \underbrace{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{n \text{ ori}} = \frac{n}{2},
\end{aligned}$$

deci şirul (s_{2^n}) are limita ∞ . Şirul (s_n) nu poate fi convergent, deoarece conţine subşirul divergent (s_{2^n}) . Prin urmare, deşi $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă.

Teorema 5.2.2 Dacă seriile $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ şi $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ sunt convergente, având sumele s respectiv t , atunci:

1. Seriile $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n \pm b_n)$ sunt convergente şi au sumele $s \pm t$;
2. Seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha a_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, este convergentă şi are sumele αs .

DEMONSTRAŢIE: 1. Fie (s_n) , (t_n) respectiv (u_n) şirurile sumelor parţiale asociate seriilor $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ respectiv $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n)$.

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k = s_n + t_n, \\
\lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + t_n) = s + t,
\end{aligned}$$

deci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n)$ este convergentă şi are suma $s + t$. Analog se arată că seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n - b_n)$ este convergentă şi are suma $s - t$.

2. Dacă (v_n) este şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha a_n$, atunci

$$\begin{aligned}
v_n &= \sum_{k=0}^n \alpha a_k = \alpha \sum_{k=0}^n a_k = \alpha s_n, \\
\lim_{n \rightarrow \infty} v_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha s_n = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \alpha s.
\end{aligned}$$

Aşadar, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha a_n$ este convergentă şi are suma αs .

Observaţia 5.2.4 1. Dacă seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n)$, respectiv $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n - b_n)$ este convergentă nu rezultă că seriile $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ şi $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ sunt convergente. Pentru exemplificare considerăm seriile $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} 2^n$ şi $\sum_{n \geq 1} (-1)^n 2^n$ care sunt divergente, dar seria $\sum_{n \geq 1} 2^n [(-1)^{n+1} + (-1)^n] = \sum_{n \geq 1} 0$ este convergentă.

2. Dacă seriile $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ şi $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ sunt divergente având sumele $+\infty$ sau $-\infty$, atunci când au sens $s \pm t$, αs teorema 5.2.2 rămâne valabilă şi în aceste situaţii. Dacă $s + t$ nu are sens natura seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n)$ poate fi oricum.

De exemplu seriile $\sum_{n \geq 1} n$ şi $-2 -1 -4 -3 -6 - \dots$ sunt divergente, iar seria suma $\sum_{n \geq 1} (-1)^n$ este oscilantă.

5.3 Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare

Atunci când studiem o serie de numere ne interesează două aspecte și anume: natura seriei, iar în caz de convergență suma ei.

Deseori este greu de aflat suma unei serii convergente, așa că de cele mai multe ori ne rezumăm la aflarea naturii ei. Pentru a găsi suma aproximativă a unei serii convergente adunăm un număr suficient de mare de termeni ai săi pentru a aproxima suma seriei cu o eroare oricât de mică.

Cele mai importante sunt criteriile necesare și suficiente care stabilesc convergența sau divergența seriei.

În cele ce urmează stabilim criterii necesare, criterii suficiente și criterii necesare și suficiente de convergență pentru seriile cu termeni oarecare.

Teorema 5.3.1 *Criteriul general de convergență al lui Cauchy*

O serie de numere reale $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$ și $\forall p \geq 1$ să avem

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon. \quad (5.1)$$

DEMONSTRAȚIE: Dacă $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ este șirul sumelor parțiale asociat seriei, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă \Leftrightarrow șirul (s_n) este convergent \Leftrightarrow (conform teoremei 2.4.7) șirul (s_n) este șir fundamental $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$ și $\forall p \geq 1$ avem $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$. Însă

$$s_{n+p} - s_n = \sum_{k=0}^{n+p} a_k - \sum_{k=0}^n a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}.$$

Observația 5.3.1 Condiția (5.1) se numește condiția Cauchy pentru serii.

Exemplu 5.3.1 *Seria armonică generalizată $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă pentru $\alpha \leq 1$. Dacă $\alpha \leq 0$, atunci $\frac{1}{n^\alpha} \not\rightarrow 0$ și conform teoremei 5.2.1 seria este divergentă. Fie acum $0 < \alpha \leq 1$, $\varepsilon = \frac{1}{4}$ și alegem $n\left(\frac{1}{4}\right) = N$ din teorema 5.3.1, $p = N$ și $n = N$. Atunci:*

$$\begin{aligned} a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} &= \frac{1}{(N+1)^\alpha} + \frac{1}{(N+2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2N)^\alpha} > \\ &> \frac{N}{(2N)^\alpha} \geq \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

așadar nu putem avea $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < \frac{1}{4}$, deci seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă și pentru $0 < \alpha \leq 1$.

Definiția 5.3.1 Fie $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ o serie de numere. Se numește restul seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ suma seriei (dacă există) $\sum_{p \geq 1} a_{n+p}$ și se notează $R_n = \sum_{p \geq 1} a_{n+p}$.

Teorema 5.3.2 O serie de numere reale $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă \Leftrightarrow șirul (R_n) al resturilor seriei este un șir convergent către zero.

DEMONSTRAȚIE: Seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă \Leftrightarrow (conform teoremei 5.3.1) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$ și $\forall p \geq 1$ $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall p \geq 1$ $(\sum_{k=1}^p a_{n+k}) \rightarrow 0$ $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow R_n \rightarrow 0$.

Teorema 5.3.3 *Criteriul Abel (1802 - 1829) - Dirichlet (1805 - 1859)*

Dacă seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este o serie de numere astfel încât șirul sumelor parțiale asociat este mărginit, iar (b_n) este un șir de numere monoton descrescător, $b_n \rightarrow 0$, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$ este convergentă.

DEMONSTRAȚIE: Pentru orice $p \geq 1$ avem:

$$\begin{aligned} & |a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \dots + a_{n+p}b_{n+p}| = |b_{n+1}(s_{n+1} - s_n) + \\ & + b_{n+2}(s_{n+2} - s_{n+1}) + \dots + b_{n+p}(s_{n+p} - s_{n+p-1})| = \\ & = |-b_{n+1}s_n + s_{n+1}(b_{n+1} - b_{n+2}) + s_{n+2}(b_{n+2} - b_{n+3}) + \dots + \\ & + s_{n+p-1}(b_{n+p-1} - b_{n+p}) + b_{n+p}s_{n+p}| \leq b_{n+1}|s_n| + (b_{n+1} - b_{n+2})|s_{n+1}| + \\ & + (b_{n+2} - b_{n+3})|s_{n+2}| + \dots + (b_{n+p-1} - b_{n+p})|s_{n+p-1}| + b_{n+p}|s_{n+p}| \end{aligned} \quad (5.2)$$

Deoarece șirul (s_n) este mărginit $\Rightarrow \exists M > 0$ astfel încât $|s_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Atunci inegalitate (5.2) devine:

$$\begin{aligned} & |a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \dots + a_{n+p}b_{n+p}| \leq M(b_{n+1} + b_{n+1} - b_{n+2} + \\ & + b_{n+2} - b_{n+3} + \dots + b_{n+p-1} - b_{n+p} + b_{n+p}) = 2M b_{n+1} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Întrucât $b_n \rightarrow 0$ avem $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $b_n < \frac{\varepsilon}{2M}$, $\forall n \geq n(\varepsilon)$ și atunci din (5.3) rezultă

$$|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \dots + a_{n+p}b_{n+p}| < \varepsilon.$$

Prin urmare, verificându-se condiția Cauchy pentru seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$ obținem convergența acesteia.

Exemplu 5.3.2 Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos \frac{n\pi}{4}}{n}$ este convergentă. Într-adevăr, avem

$$s_n = \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{4} = \frac{\sin \frac{n\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{8}} \cos \frac{(n+1)\pi}{8}, \quad \forall n \geq 1$$

și $|s_n| \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}}$, $\forall n \geq 1$, iar $b_n = \frac{1}{n}$ converge descrescător către zero.

5.4 Serii alternate

Se numește serie alternată o serie pentru care produsul a doi termeni consecutivi este negativ, adică o serie de numere reale de forma $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$ sau $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n+1} a_n$, unde $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema 5.4.1 *Leibniz (1646 - 1716)*

Dacă într-o serie alternată $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n b_n$ șirul b_n converge monoton descrescător către zero, $b_n \searrow 0$, atunci seria alternată este convergentă.

DEMONSTRAȚIE: Aplicăm teorema 5.3.3 pentru $a_n = (-1)^n$ și b_n din enunț. Șirul sumelor parțiale asociat seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$, (s_n) este mărginit, deoarece $s_n \in \{0, 1\}$, $\forall n \geq 0$.

Exemplu 5.4.1 *Seria armonică generalizată alternată $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha > 0$, deoarece atunci $\frac{1}{n^\alpha} \searrow 0$.*

În continuare ne propunem să aproximăm suma unei serii alternate.

Teorema 5.4.2 *Dacă într-o serie alternată $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} a_n$ în care șirul (a_n) converge monoton descrescător către zero, înlocuim suma s a seriei cu suma parțială s_n a unui număr finit n de termeni, obținem o eroare mai mică decât primul termen neglijat a_{n+1} . Eroarea este prin lipsă dacă n este par, și prin adaos dacă n este impar.*

DEMONSTRAȚIE: $s_{2n+1} = s_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) < s_{2n-1}$

$$s_{2n} = s_{2n-2} + (a_{2n-1} - a_{2n}) > s_{2n-2}$$

Așadar, șirul sumelor parțiale impare (s_{2n-1}) este descrescător, iar șirul sumelor parțiale pare (s_{2n}) este crescător, amândouă fiind convergente, deoarece sunt subșiruri ale șirului sumelor parțiale (s_n) , care este convergent. Avem

$$s_2 < s_4 < \dots < s_{2n} < \dots < s < \dots < s_{2n+1} < \dots < s_3 < s_1$$

$$0 < s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \Rightarrow s - s_{2n} < a_{2n+1},$$

$$0 < s_{2n+1} - s_{2n+2} = a_{2n+2} \Rightarrow s_{2n+1} - s < a_{2n+2},$$

adică

$$0 < (-1)^n (s - s_n) < a_{n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

Prin urmare, aproximând suma s a seriei cu suma parțială s_n eroarea absolută este cel mult egală cu a_{n+1} .

Exemplu 5.4.2 *Considerăm seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n^3}$ căreia îi vom calcula suma cu aproximație mai mică decât 10^{-2} . Alegem $n \geq 1$ minim astfel ca $a_{n+1} \leq \frac{1}{10^2}$, adică $\frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{10^2}$. Obținem $n = 4$ și $s \simeq s_4 = -1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} + \frac{1}{64} = -\frac{1549}{1728} \simeq -0,896412$*

5.5 Serii absolut convergente

Definiția 5.5.1 *O serie de numere reale $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ se numește absolut convergentă dacă seria modulelor $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ este convergentă.*

O serie de numere reale $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ care este convergentă, dar pentru care seria modulelor nu este convergentă se numește semiconvergentă.

Teorema 5.5.1 *Orice serie de numere absolut convergentă este convergentă.*

DEMONSTRAȚIE: Fie seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ absolut convergentă. Atunci seria modulelor fiind convergentă are loc condiția Cauchy pentru aceasta, adică: $\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$ și $\forall p \geq 1$ $|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$. Dar $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon, \forall n \geq n(\varepsilon)$ și $\forall p \geq 1$. Așadar, se verifică condiția Cauchy pentru seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$; rezultă că seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă.

Observația 5.5.1 1. *Seriile cu termeni numere reale pozitive, convergente sunt absolut convergente.*

2. *Reciproca teoremei 5.5.1 nu este, în general, valabilă, după cum se va observa din următorul exemplu.*

Exemplu 5.5.1 1. *Seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ pentru $\alpha > 1$ este absolut convergentă.*

2. *Seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ pentru $0 < \alpha \leq 1$ este semiconvergentă, deoarece seria modulelor este seria armonică generalizată, care este divergentă dacă $\alpha \leq 1$.*

Una dintre proprietățile remarcabile ale seriilor de numere absolut convergente este cea referitoare la schimbarea ordinii termenilor.

Teorema 5.5.2 *Dirichlet (1805 - 1859)*

Dacă într-o serie absolut convergentă se schimbă ordinea termenilor obținem tot o serie absolut convergentă și cu aceeași sumă.

DEMONSTRAȚIE: Fie $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ o serie absolut convergentă cu suma s . Considerăm $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ o aplicație bijectivă (permutare a mulțimii numerelor naturale) și $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$ seria obținută din seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ prin permutarea termenilor săi.

Notăm cu (s_n) , respectiv (s'_n) șirurile sumelor parțiale asociate seriilor $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$, respectiv $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$. Dacă $\varepsilon > 0$, deoarece seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este absolut convergentă, există $N = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât să avem $|s - s_N| < \frac{\varepsilon}{2}$ și

$$|a_{N+p}| + |a_{N+p+1}| + \cdots + |a_{N+q}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall p \geq 1 \quad \text{și} \quad \forall q > p.$$

Alegem un număr natural $N_1 = n_1(N) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall m \geq N_1$ s'_m să conțină termenii a_1, a_2, \dots, a_N . Pe lângă acești termeni s'_m va conține și alți termeni pe care-i notăm $a_{N+k_1}, a_{N+k_2}, \dots, a_{N+k_m}$. Avem

$$|a_{N+k_1} + a_{N+k_2} + \cdots + a_{N+k_m}| \leq |a_{N+k_1}| + |a_{N+k_2}| + \cdots + |a_{N+k_m}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall m \geq N_1,$$

adică $|s'_m - s_N| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall m \geq N_1$.

Pentru orice $m \geq N_1$ obținem

$$|s - s'_m| = |s - s_N + s_N - s'_m| \leq |s - s_N| + |s'_m - s_N| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon;$$

astfel $\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = s$, deci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$ este convergentă și are aceeași sumă s ca și seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

În continuare se aplică același raționament pentru seriile $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_{\sigma(n)}|$.

Observația 5.5.2 1. *Seriile absolut convergente au o proprietate asemănătoare cu aceea a sumei unei mulțimi finite, și anume comutativitatea.*

2. *Pentru a efectua suma elementelor unei mulțimi infinite de numere (dacă există), nu are importanță ordinea în care le adunăm.*

3. *Pentru seriile numerice semiconvergente această proprietate nu se menține.*

Teorema 5.5.3 *Riemann (1826 - 1866)*

Dacă $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este o serie de numere reale semiconvergentă, atunci printr-o permutare a termenilor putem obține:

- a) *o serie convergentă cu suma un număr arbitrar dat;*
- b) *o serie divergentă;*
- c) *o serie oscilantă.*

DEMONSTRAȚIE: a) Seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ fiind semiconvergentă, rezultă că seria modulelor $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ este divergentă.

Notăm $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^n |a_k|$, cu u_n suma termenilor pozitivi care se află printre primii n termeni ai șirului (a_n) , și cu $-v_n$ suma termenilor negativi care se află printre primii n termeni ai șirului (a_n) , $\forall n \geq 1$.

Avem $s_n = u_n - v_n$ și $\sigma_n = u_n + v_n$, $\forall n \geq 1$. Atunci $u_n = \frac{s_n + \sigma_n}{2}$ și $v_n = \frac{\sigma_n - s_n}{2}$, $\forall n \geq 1$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$, seriile formate cu termenii pozitivi, respectiv cu termenii negativi ai seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ au sumele ∞ , respectiv $-\infty$.

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ un număr dat. Vom construi printr-o schimbare a ordinii termenilor seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ o serie convergentă cu suma α . Pentru aceasta, luăm în ordine în care apar în seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ cel mai mic număr de termeni pozitivi a căror sumă este mai mare decât α . După aceea vom lua în ordine în care apar în seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ cel mai mic număr de termeni negativi astfel încât suma termenilor considerați de la început să fie mai mică decât α . Continuând acest procedeu aranjăm toți termenii seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ într-o altă ordine.

Dacă A_n sunt sumele parțiale ale seriei construite și după primele n operații avem m_n termeni pozitivi și negativi luați, atunci:

$$A_1 > \alpha, A_3 > \alpha, \dots, A_{m_n} > \alpha, \quad \text{dacă } n \text{ este impar și}$$

$$A_2 < \alpha, A_4 < \alpha, \dots, A_{m_n} < \alpha, \quad \text{dacă } n \text{ este par.}$$

Dacă n este impar, cum m_n este cel mai mic număr de termeni luați astfel încât $A_{m_n} > \alpha$, atunci $0 < A_{m_n} - a_{m_n} \leq \alpha$, de unde $0 < A_{m_n} - \alpha \leq a_{m_n}$. Dacă n este par, în mod analog avem $A_{m_n} - a_{m_n} \geq \alpha$, de unde $0 < \alpha - A_{m_n} \leq -a_{m_n}$.

Prin urmare, obținem:

$$|\alpha - A_{m_n}| \leq |a_{m_n}|, \quad \forall n \geq 1. \quad (5.4)$$

Deoarece seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă, $a_n \rightarrow 0$, deci $a_{m_n} \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$. Din (5.4) rezultă că $A_{m_n} \rightarrow \alpha$, $n \rightarrow \infty$.

După modul de construcție a noii serii se observă, că orice sumă A_k este situată între două sume A_{m_n} consecutive, una de ordin par, iar cealaltă de ordin impar:

$$A_{m_{2n}} \leq A_k \leq A_{m_{2n+1}},$$

și, cum $A_{m_{2n}}, A_{m_{2n+1}} \rightarrow \alpha$, $n \rightarrow \infty$, șirul (A_n) are limita α .

b) Procedăm în mod analog ca la punctul a. Alegem un număr de termeni pozitivi astfel încât suma lor să fie mai mare decât 1, apoi adăugăm un termen negativ. Alegem în continuare un număr de termeni pozitivi astfel încât suma tuturor termenilor aleși să fie mai mare decât 2, apoi adăugăm un termen negativ. Continuând procedeul, la al n -lea pas, adăugăm un număr de termeni pozitivi astfel ca suma tuturor termenilor aleși să fie mai mare decât n și apoi adăugăm un termen negativ. Seria astfel construită este divergentă.

c) Acum vom construi o serie oscilantă pornind de la seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$. Alegem un număr de termeni pozitivi având suma mai mare decât 1 și adăugăm un număr de termeni negativi, astfel ca suma tuturor termenilor aleși să fie mai mică decât 0. În continuare, adăugăm un număr de termeni astfel ca suma tuturor termenilor aleși să fie mai mare decât 1, ș.a.m.d. Sumele obținute formează un șir care nu are limită. Prin urmare, nici șirul sumelor parțiale al seriei nu are limită și seria astfel construită este oscilantă.

5.6 Serii cu termeni pozitivi

Definiția 5.6.1 O serie de numere $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ se numește serie cu termeni pozitivi dacă există un rang începând de la care toți termenii seriei sunt strict pozitivi, adică $\exists N \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n > 0, \forall n \geq N$.

Observația 5.6.1 1. Deoarece obiectul studiului nostru la seriile cu termeni pozitivi îl constituie natura acestora și, cum prin suprimarea unui număr finit de termeni ai unei serii nu se modifică natura ei (ci doar suma în caz de convergență), vom considera serii în care toți termenii sunt strict pozitivi.

2. Criteriile pe care le vom enunța pentru seriile cu termeni pozitivi constituie criterii de absolut convergență pentru serii cu termeni oarecare.

Teorema 5.6.1 Criteriul monotoniei

Dacă șirul sumelor parțiale (s_n) asociat unei serii cu termeni pozitivi $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este mărginit, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă.

DEMONSTRAȚIE: Șirul (s_n) este strict crescător, deoarece

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} > s_n, \quad (a_{n+1} > 0), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

și, cum din ipoteză (s_n) este mărginit, atunci (s_n) este convergent, deci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă.

Observația 5.6.2 Dacă șirul sumelor parțiale asociat unei serii cu termeni pozitivi este nemărginit, atunci seria este divergentă.

Exemplu 5.6.1 Pentru $\alpha > 1$ seria Riemann $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă. Scriem șirul sumelor parțiale (s_n) sub forma:

$$\begin{aligned} s_{2^n-1} &= \frac{1}{1^\alpha} + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} \right) + \cdots + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{(n-1)\alpha}} + \frac{1}{(2^{(n-1)}+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^\alpha} \right) < \\ &< \frac{1}{1^\alpha} + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2}{2^{2\alpha}} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^{(n-1)\alpha}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}} + \cdots + \frac{1}{2^{(n-1)(\alpha-1)}} = \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^{n(\alpha-1)}}}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Șirul sumelor parțiale fiind mărginit conform teoremei 5.6.1, rezultă că seria Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$.

Teorema 5.6.2 Criteriul de comparație cu inegalități I

Considerăm seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ și presupunem că există un număr natural $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n \leq b_n, \forall n \geq N$.

1. Dacă seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă.
2. Dacă seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ este divergentă.

DEMONSTRAȚIE: 1. Putem presupune că $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, după ce în prealabil am modificat primii $N - 1$ termeni (neschimbând în felul acesta natura seriilor).

Fie (s_n) , respectiv (t_n) șirurile sumelor parțiale asociate seriilor $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$, respectiv $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$.

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k = t_n \quad , \quad \forall n \geq 1 \quad (5.5)$$

Dacă seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ este convergentă, atunci șirul (t_n) este mărginit. Din (5.5) rezultă că și șirul (s_n) este mărginit și, conform criteriului monotoniei, obținem seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ convergentă.

2. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

Exemplu 5.6.2 1. *Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 \sqrt{n+7}}$ este convergentă, deoarece $\frac{1}{n^2 \sqrt{n+7}} < \frac{1}{n^2}, \forall n \geq 1$, iar seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ este convergentă (seria armonică pentru $\alpha = 2$.)*

2. *Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ este divergentă, deoarece $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \forall n \geq 2$, iar seria armonică $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă.*

Observația 5.6.3 Fie $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n, \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ două serii cu termeni pozitivi.

Dacă $\exists N \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n \leq b_n, \forall n \geq N$, iar seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă (sau seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ este divergentă), nu putem spune nimic, în general, despre natura celeilalte serii.

Teorema 5.6.3 Considerăm $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ două serii cu termeni pozitivi.

1. Dacă $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$ și seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă.
2. Dacă $0 < \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ și seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ este convergentă.
3. Dacă $0 < \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$ atunci cele două serii au aceeași natură.

DEMONSTRAȚIE: 1. Fie $l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$ și $l < \alpha < \infty$ un număr fixat. Din teorema 2.5.2 rezultă că $\exists N \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{a_n}{b_n} \leq \alpha, \forall n \geq N$, deci $a_n \leq \alpha b_n, \forall n \geq N$. Conform teoremei 5.6.2 obținem cerința punctului 1.

2. Fie $b = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$ și $0 < \alpha < l$ un număr fixat. Din teorema 2.5.2 rezultă că $\exists N \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{a_n}{b_n} \geq \alpha, \forall n \geq N$, deci $b_n \leq \frac{1}{\alpha} a_n$. Conform teoremei 5.6.2 obținem cerința punctului 2.

3. Rezultă din 1 și 2.

Corolarul 5.6.1 Considerăm că $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ sunt două serii cu termeni pozitivi și presupunem că există limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ în \mathbb{R} .

1. Dacă $l = 0$ și seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă.
2. Dacă $l = \infty$ și seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este divergentă.
3. Dacă $0 < l < \infty$, atunci cele două serii au aceeași natură.

Exemplu 5.6.3 1. *Seria $\sum_{n \geq 1} \sin \frac{1}{n^2}$ este convergentă, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$, iar seria*

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.

2. *Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ este divergentă, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{n}} = \infty$ și seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă.*

3. *Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$ este convergentă, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{n^2}} = 0$ și seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.*

Teorema 5.6.4 *Criteriul de comparație cu inegalități II*

Considerăm $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ două serii cu termeni pozitivi și presupunem că există un număr natural $N \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad , \quad \forall n \geq N.$$

1. *Dacă seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă.*

2. *Dacă seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ este divergentă.*

DEMONSTRAȚIE: Din $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $\forall n \geq N$ obținem $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$, $\forall n \geq N$. Pentru orice $p \geq 1$ avem:

$$\frac{a_{N+p}}{b_{N+p}} \leq \frac{a_{N+p-1}}{b_{N+p-1}} \leq \dots \leq \frac{a_N}{b_N},$$

$a_{N+p} \leq \alpha b_{N+p}$, unde $\alpha = \frac{a_N}{b_N} > 0$. Cum $a_n \leq \alpha b_n$, $\forall n \geq N$ aplicând teorema 5.6.2 seriilor $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha b_n$ demonstrația teoremei este încheiată.

Exemplu 5.6.4 *Seria $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$ este divergentă. Deoarece pentru orice $n \geq 1$ e $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ avem:*

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

iar seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă, conform teoremei 5.6.4, rezultă că seria este $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$ divergentă.

Teorema 5.6.5 *Criteriul de condensare al lui Cauchy*

Dacă $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este o serie cu termeni pozitivi pentru care șirul termenilor (a_n) este monoton descrescător, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ are aceeași natură cu seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$.

DEMONSTRAȚIE: Fie $k \in \mathbb{N}$, $2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$ și notăm $\sigma_k = \sum_{i=1}^k 2^i a_{2^i}$ șirul sumelor parțiale asociat seriei $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$.

Presupunem seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ convergentă. Atunci șirul sumelor parțiale asociat acestei serii, (s_n) , este mărginit. Avem

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \\ &\geq (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k}) \geq \\ &\geq \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \cdots + 2^k a_{2^k}) = \frac{1}{2} \sigma_k, \end{aligned}$$

deoarece șirul termenilor (a_n) este monoton descrescător. Deci $\sigma_k \leq 2 s_n$, $\forall k \in \mathbb{N}$ și $\forall 2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$. Rezultă că șirul (σ_k) este mărginit și, conform criteriului monotoniei, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ este convergentă.

Presupunând seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ convergentă, rezultă că șirul (σ_k) este mărginit. Avem

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq \\ &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \cdots + 2^k a_{2^k} = \sigma_k, \end{aligned}$$

deoarece șirul (a_n) este monoton descrescător. Așadar $s_n \leq \sigma_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ și $\forall 2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$.

Rezultă astfel că șirul (s_n) este mărginit și, conform criteriului monotoniei, seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă.

Exemplu 5.6.5 1. Aplicăm teorema 5.6.5 seriei $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$.

Pentru $\alpha > 0$ seria Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ are aceeași natură cu seria

$$\sum_{n \geq 1} 2^n \frac{1}{2^{n\alpha}} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)^n.$$

Ultima serie este convergentă (serie geometrică) $\Leftrightarrow \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, adică $\alpha > 1$.

2. Considerăm seria $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$. Conform criteriului condensării această serie are aceeași natură cu seria

$$\sum_{n \geq 2} 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln 2},$$

care este divergentă.

Teorema 5.6.6 Criteriul radical al lui Cauchy

Considerăm $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1. Dacă $\exists q$, $0 < q < 1$ și $\exists N \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, $\forall n \geq N$, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă
2. Dacă $\exists N \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, $\forall n \geq N$, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este divergentă.

DEMONSTRAȚIE: 1. $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, $\forall n \geq N \Leftrightarrow a_n \leq q^n$, $\forall n \geq N$. Cum seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$ este convergentă ($q \in (0, 1)$), atunci, conform teoremei 5.6.2, rezultă că seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ convergentă.

2. Dacă $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, $\forall n \geq N \Leftrightarrow a_n \geq 1$, $\forall n \geq N$ și deci $a_n \not\rightarrow 0$. Conform teoremei 5.2.1 seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este divergentă.

O altă formă a criteriului radicalic este dată în următorul corolar.

Corolarul 5.6.2 Considerăm $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ o serie cu termeni pozitivi și $l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$.

1. Dacă $l < 1$, atunci seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ este convergentă.
2. Dacă $l > 1$, atunci seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ este divergentă.
3. Dacă $l = 1$, atunci nu se poate spune, în general, care este natura seriei.

DEMONSTRAȚIE: 1. Din $l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \forall l < q < 1, \exists N = n(q) \in \mathbf{N}$ astfel încât $\sqrt[n]{a_n} \leq q, \forall n \geq N$. Atunci, conform teoremei 5.6.6, seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ este convergentă.

2. Deoarece $l > 1, \exists N = n(l) \in \mathbf{N}$ astfel încât $\sqrt[n]{a_n} > 1, \forall n \geq N$ și, conform teoremei 5.6.6, seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ este divergentă.

3. Fie $a_n = \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}; \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^\alpha}} = 1$, dar seria este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Corolarul 5.6.3 Forma practică a criteriului radicalic

Considerăm $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ o serie cu termeni pozitivi și presupunem că există limita $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$.

1. Dacă $l < 1$, atunci seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ este convergentă.
2. Dacă $l > 1$, atunci seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ este divergentă.
3. Dacă $l = 1$ natura seriei $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ poate fi oricum.

Exemplu 5.6.6 1. Fie seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\left[\frac{3}{2} + (-1)^n\right]^n}$

Avem

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\frac{3}{2} + (-1)^n} = \begin{cases} 2, & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ \frac{2}{5}, & \text{dacă } n \text{ este par} \end{cases}$$

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 2 > 1$, deci seria dată este divergentă.

2. Fie seria $\sum_{n \geq 1} \left[\frac{2 + (-1)^n}{5}\right]^n$.

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2 + (-1)^n}{5} = \begin{cases} \frac{1}{5}, & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ \frac{3}{5}, & \text{dacă } n \text{ este par} \end{cases}$$

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{3}{5} < 1$, deci seria dată este convergentă.

3. Fie seria $\sum_{n \geq 1} a^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{np}, a > 0$ și $p \in \mathbb{R}$

$$\sqrt[n]{a_n} = a \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \rightarrow a.$$

Dacă $0 < a < 1$ seria este convergentă, iar dacă $a > 1$ seria este divergentă.

Pentru $a = 1, a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{np} \rightarrow e^p$, deci $a_n \not\rightarrow 0$ și în acest caz seria este divergentă.

Teorema 5.6.7 *Criteriul raportului al lui D'Alembert (1717-1783).*

Considerăm $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1. Dacă $\exists q, 0 < q < 1$ și $\exists N \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q, \forall n \geq N$, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă.
2. Dacă $\exists N \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \forall n \geq N$, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este divergentă.

DEMONSTRAȚIE: 1. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q, \forall n \geq N \Leftrightarrow a_{n+1} \leq q a_n, \forall n \geq N$. Avem

$$\begin{aligned} a_{N+1} &\leq q a_N \\ a_{N+2} &\leq q a_{N+1} \leq q^2 a_N \\ &\vdots \\ a_{N+p} &\leq q a_{N+p-1} \leq \cdots \leq q^p a_N, \quad \forall p \geq 1. \end{aligned}$$

Întrucât $q \in (0, 1)$ seria $\sum_{p \geq 1} q^p a_N$ este convergentă și atunci, conform teoremei 5.6.2, rezultă că seria $\sum_{p \geq 1} a_{N+p}$ este convergentă, iar din observația 5.6.1, obținem seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ convergentă.

2. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \forall n \geq N \Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n, \forall n \geq N$, deci șirul termenilor este un șir de numere pozitive, crescător, prin urmare $a_n \not\rightarrow 0$. Conform teoremei 5.2.1 seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este divergentă.

O altă formă a criteriului raportului este dată în următorul corolar.

Corolarul 5.6.4 *Considerăm $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ o serie cu termeni pozitivi.*

1. Dacă $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă.
2. Dacă $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este divergentă.

DEMONSTRAȚIE: Din $l_2 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ și teorema 2.5.2 rezultă că $\forall l_2 < q < 1, \exists N = n(q) \in \mathbb{N}$ astfel încât să avem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q, \quad \forall n \geq N,$$

și, conform teoremei 5.6.7, obținem seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ convergentă.

2. Din $l_1 = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ și teorema 2.5.2 rezultă că $\exists N = n(l_1) \in \mathbb{N}$ astfel încât să avem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \quad \forall n \geq N,$$

și, conform teoremei 5.6.7, obținem seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ divergentă.

Corolarul 5.6.5 *Forma practică a criteriului raportului.*

Considerăm $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ o serie cu termeni pozitivi și presupunem că există limita $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1. Dacă $l < 1$, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este convergentă.
2. Dacă $l > 1$, atunci seria $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ este divergentă.

3. Dacă $l = 1$, natura seriei $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ poate fi oricum.

Exemplu 5.6.7 1. Fie seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} 2^{(-1)^n - n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{(-1)^{n+1} - n - 1 - (-1)^n + n} = 2^{2(-1)^{n+1} - 1} = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{dacă } n \text{ par} \\ 2, & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}$$

Atunci

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 > 1, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{8} < 1,$$

deci criteriul raportului nu dă nici o informație asupra naturii seriei. Observăm că

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{(-1)^n - n}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

și, conform criteriului radicalic, seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} 2^{(-1)^n - n}$ este convergentă.

2. Dacă $l = 1$ nu se poate afirma, în general, care este natura seriei. Aplicând criteriul raportului pentru seria armonică generalizată $\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ avem $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \rightarrow 1$, însă seria este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Teorema 5.6.8 Criteriul lui Kummer (1810 - 1893)

Considerăm $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1. Dacă există un șir (u_n) de numere pozitive, un număr $\alpha > 0$ și un număr natural $N \in \mathbf{N}$ astfel încât

$$u_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1} \geq \alpha \quad , \quad \forall n \geq N,$$

atunci seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ este convergentă.

2. Dacă există un șir (u_n) de numere strict pozitive astfel ca seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{u_n}$ să fie divergentă și există un număr natural $N \in \mathbf{N}$ astfel încât

$$u_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1} \leq 0 \quad , \quad \forall n \geq N,$$

atunci seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ este divergentă.

DEMONSTRAȚIE: 1. După o eventuală renumerotare a termenilor putem presupune că

$$u_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1} \geq \alpha \quad , \quad \forall n \geq 1 \tag{5.6}$$

Din inegalitatea (5.6) avem

$$u_n a_n - u_{n+1} a_{n+1} \geq \alpha a_{n+1} \quad , \quad \forall n \geq 1,$$

adică

$$\begin{aligned} u_1 a_1 - u_2 a_2 &\geq \alpha a_2 \\ u_2 a_2 - u_3 a_3 &\geq \alpha a_3 \\ &\dots\dots\dots \\ u_n a_n - u_{n+1} a_{n+1} &\geq \alpha a_{n+1} \quad , \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Adunând aceste inegalități obținem:

$$u_1 a_1 - u_{n+1} a_{n+1} \geq \alpha (a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1}) \quad , \quad \forall n \geq 1,$$

$$a_1(u_1 + \alpha) - u_{n+1}a_{n+1} \geq \alpha(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}) = \alpha s_{n+1} \quad , \quad \forall n \geq 1,$$

unde (s_n) este şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$.

Atunci

$$\alpha s_{n+1} \leq a_1(u_1 + \alpha) - u_{n+1}a_{n+1} < a_1(u + \alpha), s_{n+1} \leq \frac{a_1(u_1 + \alpha)}{\alpha} \quad , \quad \forall n \geq 1,$$

prin urmare, şirul (s_n) este mărginit şi, conform criteriului monotoniei, rezultă seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ convergentă.

2. Din inegalitatea $u_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1} \leq 0, \forall n \geq N$ rezultă că

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{u_{n+1}}}{\frac{1}{u_n}} \quad , \quad \forall n \geq N.$$

Din teorema 5.6.4 aplicată seriilor $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ şi $\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{u_n}$ obţinem că seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ este divergentă.

Corolarul 5.6.6 *Considerăm $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ o serie cu termeni pozitivi.*

1. *Dacă există un şir de numere pozitive astfel încât*

$$l_1 = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(u_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1} \right) > 0,$$

atunci seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ este convergentă.

2. *Dacă există un şir (u_n) de numere strict pozitive astfel ca seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{u_n}$ să fie divergentă şi dacă*

$$l_2 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(u_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1} \right) < 0,$$

atunci seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ este divergentă.

DEMONSTRAŢIE: 1. Din $l_1 = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(u_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1} \right) > 0$ şi teorema 2.5.2 avem că pentru orice $0 < \alpha < l_1, \exists N \in \mathbf{N}$ astfel încât

$$u_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1} \geq \alpha \quad , \quad \forall n \geq N.$$

Atunci, conform teoremei 5.6.8, seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ este convergentă.

2. Din $l_2 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(u_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1} \right) < 0$ şi teorema 2.5.2 există $N \in \mathbf{N}$ astfel încât

$$u_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1} \leq 0 \quad , \quad \forall n \geq N.$$

Atunci, conform teoremei 5.6.8, seria $\sum a_n$ este divergentă.

Corolarul 5.6.7 *Forma practică a criteriului Kummer*

Considerăm $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ o serie cu termeni pozitivi, (u_n) un şir de numere strict pozitive şi presupunem că există limita

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(u_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - u_{n+1} \right).$$

1. Dacă $l > 0$, atunci seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ este convergentă.
2. Dacă $l < 0$ și seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{u_n}$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ este divergentă.
3. Dacă $l = 0$, atunci natura seriei $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ poate fi oricum.

Observația 5.6.4 În criteriul lui Kummer luând $u_n = 1$ se obține criteriul raportului D'Alembert.

Teorema 5.6.9 Criteriul lui Raabe - Duhamel (1797 - 1872).

Considerăm $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1. Dacă există un număr $\alpha > 1$ și un număr natural $N \in \mathbf{N}$ astfel încât

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq \alpha \quad , \quad \forall n \geq N,$$

atunci seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ este convergentă.

2. Dacă există un număr natural $N \in \mathbf{N}$ astfel ca

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1 \quad , \quad \forall n \geq N,$$

atunci seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ este divergentă.

DEMONSTRAȚIE: Criteriul lui Raabe - Duhamel este un caz particular al criteriului Kummer, atunci când $u_n = n$.

Alte forme ale criteriului Raabe Duhamel sunt date de următoarele corolare.

Corolarul 5.6.8 Considerăm $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1$, atunci seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ este convergentă.
2. Dacă $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1$, atunci seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ este divergentă.

Corolarul 5.6.9 Forma practică a criteriului Raabe - Duhamel

Considerăm $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ o serie cu termeni pozitivi și presupunem că există limita $l = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$.

1. Dacă $l > 1$, atunci seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ este convergentă.
2. Dacă $l < 1$, atunci seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ este divergentă.
3. Dacă $l = 1$, atunci natura seriei $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ poate fi oricum.

Observația 5.6.5 De regulă, criteriul Raabe - Duhamel se aplică atunci când, folosind criteriul raportului D'Alembert nu obținem informații asupra naturii seriei.

Exemplu 5.6.8 Fie seria $\sum_{n \geq 1} a^{\ln n}$, $a > 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{\ln n+1}}{a^{\ln n}} = a^{\ln n+1-\ln n} = a^{\ln \frac{n+1}{n}} \rightarrow 1$$

și nu putem determina natura seriei cu ajutorul criteriului raportului D'Alambert

$$\begin{aligned} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= n \left(a^{\ln \frac{n}{n+1}} - 1 \right) = n \frac{a^{\ln \frac{n}{n+1}} - 1}{\ln \frac{n}{n+1}} \ln \frac{n}{n+1} = \\ &= \frac{a^{\ln \frac{n}{n+1}} - 1}{\ln \frac{n}{n+1}} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \rightarrow -\ln a. \end{aligned}$$

Dacă $a < e^{-1}$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} a^{\ln n}$ este convergentă, iar dacă $a > e^{-1}$, atunci seria dată este divergentă.

Pentru $a = e^{-1}$ avem $a_n = a^{\ln n} = e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$ și seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă.

5.7 Produsul convolutiv a două serii

Definiția 5.7.1 Fie $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ și $\sum_{n \in \mathbf{N}} b_n$ două serii de numere reale. Se numește serie produs sau produs convolutiv al celor două serii, seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} c_n$, unde $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

Există situații când seria produs a două serii convergente este divergentă, după cum se va observa în următorul exemplu.

Exemplu 5.7.1 Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ este convergentă (seria armonică generalizată alternată cu $\alpha = \frac{1}{2}$), dar nu este absolut convergentă. Fie c_n termen general al seriei produs dintre seria $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ cu ea însăși. Avem

$$c_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} (-1)^{n+k} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}$$

Atunci

$$|c_n| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} > 1.$$

Rezultă că dacă există limita șirului (c_n) aceasta este diferită de 0, deci seria $\sum_{n \geq 1} c_n$ este divergentă.

Teorema 5.7.1 Mertens (1840 - 1927)

Seria produs a două serii de numere reale $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ și $\sum_{n \in \mathbf{N}} b_n$, dintre care una este convergentă, iar cealaltă absolut convergentă, este convergentă și suma ei este produsul sumelor seriilor date, adică

$$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = \left(\sum_{n \geq 0} a_n \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n \right).$$

DEMONSTRAȚIE: Presupunem seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ absolut convergentă și seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} b_n$ convergentă.

Notăm $a = \sum_{n \geq 0} a_n$, $b = \sum_{n \geq 0} b_n$, $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^n b_k$, $r_n = b - t_n$, $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ și $\sigma_n = \sum_{k=0}^n c_k$.

Atunci

$$\begin{aligned} \sigma_n &= a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + \cdots + a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \\ &= a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_n t_0 = a_0(b - r_n) + a_1(b - r_{n-1}) + \cdots + a_n(b - r_0) = \\ &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)b - (a_0 r_n + a_1 r_{n-1} + \cdots + a_n r_0) = \\ &= s_n b - (a_0 r_n + a_1 r_{n-1} + \cdots + a_n r_0). \end{aligned}$$

Avem

$$ab - \sigma_n = (a - s_n)b + \sum_{k=0}^n r_k a_{n-k} \quad (5.7)$$

Arătăm că, dacă $r_n \rightarrow 0$ și $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ este o serie absolut convergentă de numere reale, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n r_k a_{n-k} = 0$. Pentru aceasta fie $m = \sum_{n \in \mathbf{N}} |a_n|$ și $\varepsilon > 0$. Deoarece $r_n \rightarrow 0$, există $N = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $|r_n| < \frac{\varepsilon}{2m}$, $\forall n \geq N$.

Seria $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ fiind absolut convergentă, atunci $a_n \rightarrow 0$, deci $\exists N' \geq N$ astfel încât

$$|a_n| \leq \left(2 \sum_{k=0}^N |r_k| \right)^{-1} \varepsilon, \quad \forall n \geq N'$$

Atunci:

$$\begin{aligned} &|(r_0 a_n + r_1 a_{n-1} + \cdots + r_N a_{n-N}) + (r_{N+1} a_{n-N-1} + \cdots + r_n a_0)| \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^N |r_k| \right) \left(2 \sum_{k=0}^N |r_k| \right)^{-1} \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2m} m = \varepsilon, \quad \forall n \geq 2N, \end{aligned}$$

așadar, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n r_k a_{n-k} = 0$.

Revenim la (5.7) și, trecând la limită, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = ab$, adică seria produs $\sum_{n \in \mathbf{N}} c_n$ este convergentă și are suma ab .

Corolarul 5.7.1 Cauchy

Seria produs a două serii de numere reale absolut convergente $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n$ și $\sum_{n \in \mathbf{N}} b_n$ este convergentă.

DEMONSTRAȚIE: Aplicând teorema 5.7.1 seriilor $\sum_{n \in \mathbf{N}} |a_n|$ și $\sum_{n \in \mathbf{N}} |b_n|$, rezultă că seria $\sum_{n \geq 0} (\sum_{k=1}^n |a_k b_{n-k}|)$ este convergentă. Deoarece

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_{n-i} \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i b_{n-i}|, \quad \forall n \geq 0$$

din teorema 5.7.1 obținem că seria $\sum_{n \geq 0} (\sum_{k=1}^n |a_k b_{n-k}|)$ este convergentă, adică seria $\sum_{n \geq 0} \sum_{k=1}^n |a_k b_{n-k}|$ absolut convergentă.

Exemplu 5.7.2 *Deoarece seria geometrică $\sum_{n \geq 0} q^n$ este absolut convergentă pentru $|q| < 1$, rezultă seria produs*

$$\left(\sum_{n \geq 0} q^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} q^n \right)$$

absolut convergentă. Suma seriei geometrice fiind $\frac{1}{1-q}$, atunci suma seriei produs $\sum_{n \geq 0}$ este $\frac{1}{(1-q)^2}$, pentru $|q| < 1$.

Capitolul 6

Șiruri de funcții. Serii de funcții. Serii de puteri

6.1 Șiruri de funcții

Șirurile de funcții constituie o generalizare naturală a șirurilor de numere.

Definiția 6.1.1 Fie $F(X, Y)$ mulțimea funcțiilor definite pe mulțimea X cu valori în mulțimea Y . Orice șir din $F(X, Y)$ se numește șir de funcții definite pe X cu valori în Y .

În cele ce urmează se consideră șiruri de funcții cu valori numere reale, deci $Y = \mathbb{R}$.

Fie A o mulțime nevidă, oarecare și (f_n) un șir de funcții reale definite pe A , $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$. Dacă $a \in A$, atunci valorile funcțiilor șirului (f_n) în punctul a formează un șir de numere $(f_n(a))$.

Definiția 6.1.2 Un punct $a \in A$ se numește punct de convergență al șirului de funcții (f_n) dacă șirul de numere $(f_n(a))$ este convergent.

Notăm A_c mulțimea punctelor de convergență ale șirului de funcții (f_n) .

$$A_c = \{a \in A \mid \text{șirul } (f_n(a)) \text{ este convergent}\}.$$

Definiția 6.1.3 Dacă (f_n) este un șir de funcții reale definite pe mulțimea A (nevidă), iar A_c este mulțimea punctelor de convergență corespunzătoare acestui șir, definim funcția $f : A_c \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $\forall x \in A_c$, numită funcția limită pe mulțimea A_c a șirului de funcții.

Definiția 6.1.4 Fie A o mulțime nevidă, (f_n) un șir de funcții reale definite pe A și $f : A_c \rightarrow \mathbb{R}$ funcția limită corespunzătoare șirului (f_n) .

Șirul de funcții (f_n) converge simplu (sau punctual) către f pe mulțimea A_c , dacă: $\forall x \in A_c$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall n \geq n(\varepsilon, x)$.

Șirul de funcții (f_n) converge uniform pe A_c către f , dacă: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall n \geq n(\varepsilon)$ și $\forall x \in A_c$.

Observația 6.1.1 a) Dacă șirul de funcții (f_n) converge simplu, respectiv uniform pe A_c către f , atunci notăm $f_n \rightarrow f$ pe A_c , respectiv $f_n \xrightarrow{UC} f$ pe A_c . Dacă convergența are loc pe tot domeniul de definiție, atunci notăm $f_n \rightarrow f$, respectiv $f_n \xrightarrow{UC} f$.

b) În cazul convergenței uniforme numărul $n(\varepsilon)$ depinde doar de ε , fiind independent de x , pe când în cazul convergenței simple $n(\varepsilon, x)$ depinde atât de ε cât și de x .

c) Din punct de vedere geometric semnificația convergenței uniforme este următoarea: date fiind un șir de funcții f_n , $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$ și funcția limită corespunzătoare $f : A_c \rightarrow \mathbb{R}$, pentru $\varepsilon > 0$, trasăm graficele funcțiilor $f - \varepsilon$, $f + \varepsilon$. Există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ce depinde doar de ε , începând de la care graficele funcțiilor f_n se află în tubul delimitat de graficele funcțiilor $f - \varepsilon$, $f + \varepsilon$.

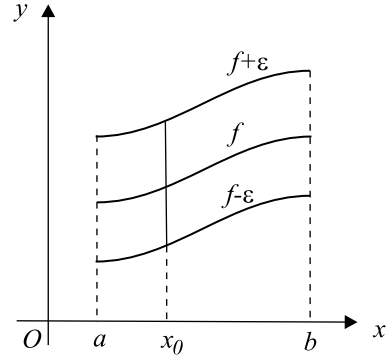


Figura 6.1:

Exemplu 6.1.1 1. Fie șirul de funcții $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f_n(x) = x^n$, $\forall n \geq 1$. Funcția limită $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{dacă } x = 1 \end{cases},$$

deci $f_n \rightarrow f$. Arătăm că (f_n) nu converge uniform pe $[0, 1]$ către f . Presupunem că $f_n \xrightarrow{UC} f$ și alegem $\varepsilon = \frac{1}{3} \Rightarrow \exists n\left(\frac{1}{3}\right) \in \mathbb{N}$ astfel încât $x^n < \frac{1}{3}$, $\forall x \in [0, 1)$, $\forall n \geq n\left(\frac{1}{3}\right)$ ceea ce este fals, prin urmare $f_n \not\xrightarrow{UC} f$.

2. Fie $A = [-1, 1]$ și șirul de funcții $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{n-1}$, $\forall n \geq 2$. Avem $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n-1} = 0$, $\forall x \in A$, deci $f_n \rightarrow f$.

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \frac{|x|}{n-1} \leq \frac{1}{n-1}$$

Fie $\varepsilon > 0$; atunci $\exists n(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 2$ astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall n \geq n(\varepsilon)$, adică $f_n \xrightarrow{UC} f$.

Observația 6.1.2 Din exemplu 1 se constată că, în general, dacă un șir de funcții este punctual convergent, atunci acesta nu este în mod obligatoriu uniform convergent.

Considerăm A o mulțime nevidă; \mathcal{M}_A este un spațiu vectorial relativ la norma uniformă, adică $\forall f \in \mathcal{M}_A$ $\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)|$.

Teorema 6.1.1 Fie (f_n) un șir de funcții din \mathcal{M}_A și $f \in \mathcal{M}_A$.

a) $f_n \xrightarrow{UC} f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$.

b) Dacă $f_n \xrightarrow{UC} f$, atunci $f_n \rightarrow f$.

DEMONSTRAȚIE: a) $f_n \xrightarrow{UC} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$ și $\forall x \in A$ să avem $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, adică $\|f_n - f\| < \varepsilon$, $\forall n \geq n(\varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$.

b) Dacă $f_n \xrightarrow{UC} f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$ și $\forall x \in A$ să avem $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x)$, $\forall x \in A$, adică $f_n \rightarrow f$.

Algoritm pentru studiul convergenței (punctuale, respectiv uniforme).

1. Dat fiind șirul de funcții reale $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$ se determină mulțimea punctelor de convergență A_c și funcția limită $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $\forall x \in A_c$. Rezultă că $f_n \rightarrow f$ pe A_c .

2. Se calculează $\varepsilon_n = \|f_n - f\| = \sup_{x \in A_c} |f_n(x) - f(x)|$. Dacă $\varepsilon_n \rightarrow 0$ atunci $f_n \xrightarrow{UC} f$ pe A_c iar dacă $\varepsilon_n \not\rightarrow 0$, atunci $f_n \not\xrightarrow{UC} f$ pe A_c .

Exemplu 6.1.2 Șirul de funcții $f_n : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{x^2}{n^2 + x^4}$ este uniform convergent către funcția $f(x) = 0$. Într-adevăr, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ și $f_n(x) \leq f_n(n^2)$, $\forall x \in [1, \infty)$. Atunci $\varepsilon_n = \sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f(x)| = \frac{n^4}{n^2 + n^8} \rightarrow 0$, adică $f_n \xrightarrow{UC} 0$.

Deoarece uniform convergența implică convergența punctuală e suficient să găsim criterii care să stabilească uniform convergența șirurilor de funcții.

Teorema 6.1.2 Criteriul general de convergență al lui Cauchy

Fie (f_n) un șir de funcții reale definite pe mulțimea nevidă A . Șirul (f_n) converge uniform pe A către funcția f , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall x \in A$ și $\forall n, m \geq n(\varepsilon)$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

DEMONSTRAȚIE: Presupunem că $f_n \xrightarrow{UC} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$ și $\forall x \in A$ $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Atunci $\forall n, m \geq n(\varepsilon)$ și $\forall x \in A$ avem $|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Invers, să presupunem că $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n, m \geq n(\varepsilon)$ și $\forall x \in A$ avem

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad (6.1)$$

Din (6.1) rezultă că șirul de numere $(f_n(x))$ este un șir fundamental, pentru fiecare $x \in A$ și are limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in A. \quad (6.2)$$

S-a definit astfel o funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ care asociază fiecărui element x din A numărul $f(x)$ definit prin (6.2). Rămâne de arătat că $f_n \xrightarrow{UC} f$.

Fie $m \geq n(\varepsilon)$. Cum $f_n \rightarrow f \Rightarrow f_n - f_m \rightarrow f - f_m$. Dacă în (6.1) $n \rightarrow \infty$, atunci pentru $\forall x \in A$ și $\forall m \geq n(\varepsilon)$ avem $|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, adică $f_n \xrightarrow{UC} f$.

Exemplu 6.1.3 Șirul de funcții $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\cos kx}{k(k+1)}$ este uniform convergent. Conform criteriului lui Cauchy avem, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &= \left| \frac{\cos(n+1)x}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(n+2)x}{(n+2)(n+3)} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)} \right| \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \end{aligned}$$

$\forall n \geq n(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, deci șirul (f_n) este uniform convergent.

Teorema 6.1.3 *Criteriul majorării*

Fie (f_n) un șir de funcții reale definite pe A , o funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ și (a_n) un șir de numere pozitive convergent către zero. Dacă pentru $\forall n \in \mathbb{N}$ și $\forall x \in A$ are loc inegalitatea $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$, atunci $f_n \xrightarrow{UC} f$.

DEMONSTRAȚIE: Cum $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$ avem $a_n < \varepsilon$, care împreună cu relația din enunț ne dă că $\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$ și $\forall x \in A$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, adică $f_n \xrightarrow{UC} f$.

Exemplu 6.1.4 Șirul de funcții $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{1}{n} \arctg x^n$ converge uniform pe \mathbb{R} către funcția $f(x) = 0$. Într-adevăr $|f_n(x)| = \frac{1}{n} |\arctg x^n| < \frac{\pi}{2n} \rightarrow 0$. Așadar, conform teoremei 6.1.3, rezultă că $f_n \xrightarrow{UC} 0$ pe \mathbb{R} .

6.2 Proprietăți ale șirurilor de funcții

O problemă importantă care apare la șirurile de funcții este următoarea: în ce măsură unele proprietăți pe care șirul de funcții le are (de exemplu continuitatea, derivabilitatea, integrabilitatea etc.) sunt transmise funcției limită? Rolul primordial pentru rezolvarea acestei probleme îl are proprietatea de convergență uniformă a șirurilor de funcții.

Teorema 6.2.1 *Transferul de continuitate*

Fie A o mulțime nevidă și (f_n) un șir de funcții reale definite pe A . Dacă funcțiile f_n sunt continue în punctul $a \in A$, iar șirul de funcții este uniform convergent pe A , atunci și funcția limită este continuă în punctul a .

DEMONSTRAȚIE: Considerăm $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ funcția limită. Arătăm că dacă $x_n \rightarrow a$ atunci $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Fie $\varepsilon > 0$. Cum $f_n \xrightarrow{UC} f \Rightarrow \exists N = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall m \geq N$ $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. În particular avem $|f_N(x_n) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon}{3}$ și $|f_N(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Deoarece funcția f_N este continuă în a rezultă că $f_N(x_n) \rightarrow f_N(a)$, deci există $n'(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n'(\varepsilon)$ $|f_N(x_n) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Avem pentru orice $n \geq n'(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(a)| &= |f(x_n) - f_N(x_n) + f_N(x_n) - f_N(a) + f_N(a) - f(a)| \leq \\ &\leq |f_N(x_n) - f(x_n)| + |f_N(x_n) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a), \end{aligned}$$

adică funcția f este continuă în punctul a .

Exemplu 6.2.1 Funcția limită f a șirului de funcții (f_n) de la exemplul 6.1.3 este o funcție continuă, deoarece funcțiile f_n sunt continue, iar șirul este uniform convergent.

Teorema 6.2.2 Dacă X este un spațiu metric compact, atunci spațiul $C^0(X)$ al funcțiilor reale continue definite pe X (cu operațiile obișnuite) este un spațiu Banach, relativ la norma sup.

DEMONSTRAȚIE: Deoarece X este spațiu metric compact, atunci rezultă că $C^0(X) \subset \mathcal{M}(X)$. Fie (f_n) un șir fundamental din $C^0(X)$. Atunci (f_n) este un șir fundamental în $\mathcal{M}(X)$. Cum $\mathcal{M}(X)$ este spațiu metric complet relativ la norma sup, există o funcție $f \in \mathcal{M}(X)$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$, ceea ce este echivalent din teorema 6.1.1 cu faptul că $f_n \xrightarrow{UC} f$. Funcțiile f_n fiind continue pe X rezultă, conform teoremei 6.2.1, că f este continuă pe X , deci $f_n \rightarrow f$ în $C^0(X)$ relativ la norma sup, adică $C^0(X)$ este un spațiu complet.

Teorema 6.2.3 *Transferul de integrabilitate sau teorema de trecere la limită sub semnul integralei*

Dacă (f_n) este un șir de funcții în $C^0([a, b])$ astfel ca $f_n \xrightarrow{UC} f$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

DEMONSTRAȚIE: Notăm $I_n = \int_a^b f_n(x) dx$ și $I = \int_a^b f(x) dx$ și arătăm că $I_n \rightarrow I$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq |I_n - I| = \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \|f_n - f\| dx = \|f_n - f\| (b - a). \end{aligned}$$

Din ipoteză avem că $f_n \xrightarrow{UC} f \Leftrightarrow f_n \rightarrow f$ în $\mathcal{M}([a, b])$ relativ la norma sup $\Leftrightarrow \|f_n - f\| \rightarrow 0$ de unde avem că $|I_n - I| \rightarrow 0 \Rightarrow I_n - I \rightarrow 0 \Rightarrow I_n \rightarrow I$.

Observația 6.2.1 *Teorema 6.2.3 este adevărată în condiții mai generale și anume, dacă înlocuim ipoteza de continuitate a funcțiilor f_n cu ipoteza de integrabilitate.*

Exemplu 6.2.2 Șirul de funcții $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f_n(x) = n \times e^{-nx^2}$ este convergent, dar $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 f(x) dx$. Într-adevăr, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, deci $f(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$;

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 n x e^{-nx^2} dx = \left(-\frac{e^{-nx^2}}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-n} \rightarrow \frac{1}{2} \neq \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Cele două limite diferă datorită faptului că șirul nu este uniform convergent.

Acest exemplu ne arată necesitatea condițiilor teoremei 6.2.3.

Teorema 6.2.4 *Transfer de derivabilitate*

Fie (f_n) un șir de funcții în $C^1([a, b])$ și funcțiile $f, g \in \mathcal{M}([a, b])$. Dacă $f_n \rightarrow f$ și $f'_n \xrightarrow{UC} g$, atunci $f \in C^1([a, b])$, $f' = g$ și $f_n \xrightarrow{UC} f$.

DEMONSTRAȚIE: Fie $x \in [a, b]$ un punct arbitrar. Avem conform formulei Leibnitz-Newton că $\int_a^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(a), \forall n \geq 1$. Trecând la limită obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a).$$

Pe de altă parte, deoarece $f'_n \xrightarrow{UC} g$ din teorema 6.2.3 avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt = \int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) dt = \int_a^x g(t) dt = G(x) - G(a),$$

unde $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ este primitivă a funcției g , deci $G'(x) = g(x), \forall x \in [a, b]$.

$$G(x) - G(a) = f(x) - f(a) \Rightarrow G'(x) = f'(x), \quad \forall x \in [a, b], \text{ adică } g = f' \text{ și } f'_n \xrightarrow{UC} f'.$$

Fie $\varepsilon > 0$, și $x_0 \in [a, b]$. Atunci din faptul că $f_n \rightarrow f$ și $f'_n \xrightarrow{UC} f'$ rezultă că $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n, m \geq n(\varepsilon)$ să avem $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ și $|f'_n(x) - f'_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \forall x \in [a, b]$.

Atunci:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0)) + f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \\ &\leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \\ &\leq |x - x_0| |f'_n(c) - f'_m(c)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|, \end{aligned}$$

unde c este cuprins între x_0 și x (am aplicat teorema creșterilor finite funcției $f_n(x) - f_m(x)$ pe intervalul închis, având extremitățile în punctele x_0 și x). Deci

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |x - x_0| |f'_n(c) - f'_m(c)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < (b-a) \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$\forall n, m \geq n(\varepsilon)$ și $\forall x \in [a, b]$. Conform criteriului general de convergență, rezultă că șirul de funcții (f_n) converge uniform pe $[a, b]$ către funcția f .

Observația 6.2.2 Intervalul $[a, b]$ poate fi înlocuit în enunțul teoremei 6.2.4 cu orice interval mărginit.

Exemplu 6.2.3 Deși șirul de funcții de la exemplu 6.1.4 converge uniform pe \mathbb{R} , $f'(1) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1)$. Funcția limită este $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0$. Pe de altă parte $f'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}, f'_n(1) = \frac{1}{2}$, prin urmare, $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1) = \frac{1}{2}$. Cele două limite diferă datorită faptului că șirul derivatelor nu converge uniform către $\frac{1}{2}$ pe \mathbb{R} .

Teorema 6.2.5 Limita g a unui șir uniform convergent (g_n) de funcții derivate pe un interval I este o funcție derivată.

DEMONSTRAȚIE: Presupunem că I este mărginit și fie $x_0 \in I$ și f_n o primitivă a funcției $g_n, \forall n \in \mathbb{N}, f'_n = g_n$. Putem alege primitivale f_n astfel încât $f_n(x_0) = 0$. Șirul $(f_n(x_0))$ este convergent și derivatele $f'_n = g_n \xrightarrow{UC} g$. Atunci, conform teoremei 6.2.4, rezultă că $f_n \xrightarrow{UC} f$, funcția f este derivabilă și $f' = g$ pe I . Presupunem că intervalul I este nemărginit. Putem atunci construi un șir crescător (I_n) de intervale mărginite astfel încât $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n \subset \dots \subset I$ și $\bigcup_{n \geq 1} I_n = I$.

Fie $x_0 \in I_1$; atunci $x_0 \in I_n, \forall n \geq 1$. Pe fiecare interval mărginit I_n , funcția g este derivata unei funcții $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$. Putem alege $f_n(x_0) = 0$. Dacă $x \in I_n$ și $x \in I_m, n < m$, atunci $I_n \subset I_m$ și cum funcțiile f_n și f_m au pe I_n aceeași derivată g rezultă că $f_n(x) - f_m(x) = \text{const}$. Dar $f_n(x_0) = f_m(x_0) = 0$, deci $f_n(x) = f_m(x), \forall x \in I_n$.

Definim funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ prin $f(x) = f_n(x), \forall x \in I_n$. Conform celor arătate mai sus $f(x)$ este independentă de intervalul ales. Arătăm că funcția f este derivabilă pe I și $f' = g$. Pentru aceasta fie $x_0 \in I$; există $I_n, x_0 \in I_n$ deci, $f(x_0) = f_n(x_0)$ și, cum f_n este derivabilă în punctul $x_0, f'_n(x_0) = g(x_0)$. Prin urmare, rezultă funcția f derivabilă în x_0 , și $f'(x_0) = f'_n(x_0) = g(x_0)$. Cum punctul x_0 a fost ales arbitrar în I , rezultă că f este derivabilă pe I și $f' = g$.

6.3 Serii de funcții

În acest paragraf vom studia serii ale căror termeni sunt funcții de o variabilă reală.

Definiția 6.3.1 Fie $A \neq \emptyset$ o mulțime și (f_n) un șir de funcții din spațiul $F(A, \mathbb{R})$ al funcțiilor reale definite pe mulțimea A . Perechea de șiruri $((f_n), (s_n))$, unde $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$, se numește serie de funcții de termen general f_n și se notează $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ sau $\sum_{n \geq 1} f_n$. Șirul (s_n) definit mai sus se numește șirul sumelor parțiale al seriei $\sum_{n \geq 1} f_n$.

Observația 6.3.1

$$\begin{aligned} 1. \quad s_1 &= f_1 \\ s_2 &= f_1 + f_2 \\ &\vdots \\ s_n &= f_1 + f_2 + \cdots + f_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

2. O serie de funcții $\sum_{n \geq 1} f_n$ este bine determinată de șirul sumelor parțiale. Astfel studiul seriei $\sum_{n \geq 1} f_n$ se reduce la studiul șirului (s_n) .

Exemplu 6.3.1 1. $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \dots$ este o serie de funcții cu termenul general x^n , $n \geq 0$.

2. $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^n}{n!} + \dots$ este o serie de funcții cu termenul general $\frac{x^n}{n!}$, $n \geq 0$.

Pentru orice $x \in A$ seria $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ este o serie de numere alcătuită din valorile șirului (f_n) în punctul $x \in A$. Această serie poate fi convergentă sau divergentă. Definim astfel mulțimea punctelor $x \in A$ pentru care seria $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ este convergentă, adică $A_c = \{x \in A \mid \text{seria } \sum_{n \geq 1} f_n(x) \text{ este convergentă}\}$ și care se numește mulțimea de convergență a seriei $\sum_{n \geq 1} f_n$.

Seria $\sum_{n \geq 1} f_n$ este convergentă în punctul $x \in A$ dacă șirul de funcții (s_n) al sumelor parțiale asociat seriei este convergent în punctul x .

Definiția 6.3.2 Fie A o mulțime nevidă, șirul de funcții (f_n) din $F(A, \mathbb{R})$ și (s_n) șirul sumelor parțiale asociat seriei $\sum_{n \geq 1} f_n$. Seria de funcții $\sum_{n \geq 1} f_n$ este convergentă (sau punctual convergentă) pe mulțimea A dacă șirul (s_n) este convergent pe A . În acest caz, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$, $\forall x \in A$ se numește suma seriei și se notează $\sum_{n \geq 1} f_n(x) = f(x)$.

Seria de funcții $\sum_{n \geq 1} f_n$ este uniform convergentă (sau converge uniform) pe mulțimea A către funcția f dacă șirul (s_n) este uniform convergent pe A către f .

Observația 6.3.2 1. Seria de funcții $\sum_{n \geq 1} f_n$ este convergentă pe mulțimea A către f dacă $\forall \varepsilon > 0$ și pentru orice $x \in A$ există un număr $n(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon, x)$ să avem $|s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ sau

$$|f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

2. Seria de funcții $\sum_{n \geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe mulțimea A către funcția f dacă $\forall \varepsilon > 0$ există un număr $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$ și $\forall x \in A$ să avem $|s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ sau

$$|f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

3. Din definiția 6.3.2 rezultă că numărul $n(\varepsilon)$ nu depinde de x în cazul convergenței uniforme, adică este același pentru orice $x \in A$.

4. Noțiunea de convergență uniformă a fost introdusă de Karl Weierstrass (1815-1897).

Teorema 6.3.1 Orice serie de funcții $\sum_{n \geq 1} f_n$ uniform convergentă este punctual convergentă.

DEMONSTRAȚIE: În definiția punctual convergenței se ia $n(\varepsilon, x) = n(\varepsilon)$, $\forall x \in A$.

6.4 Criterii de convergență uniformă pentru serii de funcții

Teorema 6.4.1 Criteriul general de convergență uniformă Cauchy

O serie de funcții $\sum_{n \geq 1} f_n$, unde $f_n \in F(A, \mathbb{R})$, $\forall n \geq 1$, este uniform convergentă pe A , dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $n \geq n(\varepsilon)$, $\forall p \geq 1$ și $\forall x \in A$ avem:

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

DEMONSTRAȚIE: Fie (s_n) șirul sumelor parțiale asociat seriei. Pentru orice $p \geq 1$ avem $s_{n+p} - s_n = f_{n+1} + f_{n+2} + \cdots + f_{n+p}$. Seria $\sum_{n \geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe A dacă și numai dacă șirul (s_n) este uniform convergent pe $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$, $\forall p \geq 1$ și $\forall x \in A$ să avem

$$|s_{n+p}(x) - s_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Teorema 6.4.2 Criteriul majorării

Fie $\sum_{n \geq 1} f_n$, $\sum_{n \geq 1} \varphi_n$ două serii de funcții, unde $f_n, \varphi_n \in F(A, \mathbb{R})$, $\forall n \geq 1$. Dacă $|f_n(x)| \leq \varphi_n(x)$, $\forall n \geq 1$ și $\forall x \in A$ și dacă seria $\sum_{n \geq 1} \varphi_n$ este uniform convergentă pe A , atunci seria $\sum_{n \geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe A .

DEMONSTRAȚIE: Fie $\varepsilon > 0$. Cum seria $\sum_{n \geq 1} \varphi_n$ este uniform convergentă pe A , rezultă din teorema 6.4.1, că $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$, $\forall p \geq 1$ și $\forall x \in A$

$$\varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \cdots + \varphi_{n+p}(x) < \varepsilon.$$

Atunci $\forall n \geq n(\varepsilon)$, $\forall p \geq 1$ și $\forall x \in A$ avem

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq \varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \cdots + \varphi_{n+p}(x) < \varepsilon.$$

și, conform teoremei 6.4.1, rezultă că seria $\sum_{n \geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe A .

Din această teoremă rezultă un corolar (Weierstrass) foarte des utilizat în stabilirea convergenței uniforme a unor serii de funcții.

Corolarul 6.4.1 Weierstrass

Fie $\sum_{n \geq 1} f_n$ o serie de funcții, $f_n \in F(A, \mathbb{R})$, $\forall n \geq 1$ și $\sum_{n \geq 1} a_n$ o serie convergentă cu termeni pozitivi. Dacă $\forall n \geq 1$ și $\forall x \in A$ avem $|f_n(x)| \leq a_n$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe A .

DEMONSTRAȚIE: În teorema 6.4.2 se ia $\varphi_n(x) = a_n$, $\forall x \in A$. Seria $\sum_{n \geq 1} a_n$ fiind convergentă $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$ și $\forall p \geq 1$ avem $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon$. Atunci $\forall n \geq n(\varepsilon)$, $\forall p \geq 1$ și $\forall x \in A$ obținem $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon$, de unde rezultă că seria de funcții constante $\sum_{n \geq 1} a_n$ este uniform convergentă. Aplicând teorema 6.4.2 șirurilor (f_n) și (a_n) rezultă cerința teoremei.

Exemplu 6.4.1 1. *Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$ este uniform convergentă $\forall x \in \mathbb{R}$. Într-adevăr, deoarece $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, iar seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, atunci conform criteriului lui Weierstrass, seria $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$ este uniform convergentă.*

2. *Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2 + x^2}$ este uniform convergentă $\forall x \in [-1, 1]$. Avem $\left| \frac{x^n}{n^2 + x^2} \right| < \frac{1}{n^2}$, $\forall x \in [-1, 1]$ și aplicăm criteriul lui Weierstrass.*

6.5 Proprietăți ale seriilor de funcții

Proprietățile seriilor de funcții uniform convergente se obțin din proprietățile șirurilor de funcții uniform convergente.

Teorema 6.5.1 *Transfer de continuitate*

Fie $\sum_{n \geq 1} f_n$ o serie de funcții uniform convergentă pe A către funcția f . Dacă funcțiile f_n sunt continue în punctul $a \in A$ (respectiv pe A), atunci și funcția f (suma seriei) este continuă în punctul a (respectiv pe A).

DEMONSTRAȚIE: Șirul $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$ al sumelor parțiale asociat seriei $\sum_{n \geq 1} f_n$ este o sumă de funcții continue în punctul a (respectiv pe A), deci (s_n) este un șir de funcții continue în a (respectiv pe A) uniform convergent către funcția f . Atunci, conform teoremei 6.2.1, funcția f este continuă în a (respectiv pe A).

Observația 6.5.1 *Din teorema 6.5.1 avem $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n \geq 1} f_n(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(a)$*

Teorema 6.5.2 *Transfer de integrabilitate sau teorema de integrare termen cu termen*

Fie $\sum_{n \geq 1} f_n$ o serie de funcții, uniform convergentă pe intervalul $[a, b]$ către funcția f . Dacă funcțiile f_n sunt continue pe $[a, b]$, atunci seria integralelor $\sum_{n \geq 1} \int_a^b f_n(x) dx$ este convergentă, funcția f este integrabilă și $\sum_{n \geq 1} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

DEMONSTRAȚIE: Din teorema 6.2.1, rezultă că funcția $f \in C^0([a, b])$ și

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n(x) dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \cdots + \int_a^b f_n(x) dx \right] = \\ &= \sum_{n \geq 1} \int_a^b f_n(x) dx \end{aligned}$$

Teorema 6.5.2 are loc într-un cadru mai general (privind continuitatea funcțiilor f_n) și anume:

Teorema 6.5.3 *Fie $\sum_{n \geq 1} f_n$ o serie de funcții, uniform convergentă pe intervalul $[a, b]$ către funcția f . Dacă funcțiile f_n sunt integrabile pe $[a, b]$, atunci seria integralelor $\sum_{n \geq 1} \int_a^b f_n(x) dx$ este convergentă, funcția f este integrabilă și $\sum_{n \geq 1} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.*

DEMONSTRAȚIE: Vezi [5] vol. II pag.409

Observația 6.5.2 *Condiția ca șirul de funcții (f_n) să fie uniform convergent este esențială, dar nu necesară. Există șiruri de funcții care nu sunt uniform convergente pe intervalul $[a, b]$, dar care se pot integra termen cu termen.*

Teorema 6.5.4 *Transfer de derivabilitate sau teorema de derivare termen cu termen*

Fie $\sum_{n \geq 1} f_n$ o serie de funcții, unde $f_n \in C^1([a, b])$. Dacă seria $\sum_{n \geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe $[a, b]$ către o funcție f , iar seria derivatelor $\sum_{n \geq 1} f'_n$ este uniform convergentă pe $[a, b]$ către o funcție g , atunci funcția f este derivabilă pe $[a, b]$ și $f' = g$.

DEMONSTRAȚIE: Șirul (s_n) al sumelor parțiale asociat seriei $\sum_{n \geq 1} f_n$ este uniform convergent pe $[a, b]$ către funcția f . Pe de altă parte șirul sumelor parțiale asociat seriei derivatelor $\sum_{n \geq 1} f'_n$ este uniform convergent pe $[a, b]$ către funcția g . Atunci, conform teoremei 6.2.4, funcția f este derivabilă și $f' = g$, adică $f'(x) = \sum_{n \geq 1} f'_n(x)$. Așadar derivata sumei unei serii (în condițiile teoremei) este egală cu suma seriei alcătuită din derivatele termenilor săi.

Teorema 6.5.4 are loc în condiții mai puțin restrictive (privind uniform convergența seriei $\sum_{n \geq 1} f_n$).

Teorema 6.5.5 *Fie $\sum_{n \geq 1} f_n$ o serie de funcții, unde $f_n \in C^1([a, b])$. Dacă seria $\sum_{n \geq 1} f_n$ este convergentă într-un punct $x_0 \in [a, b]$ iar seria derivatelor $\sum_{n \geq 1} f'_n$ este uniform convergentă pe $[a, b]$ către o funcție g , atunci seria $\sum_{n \geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe $[a, b]$ către o funcție f , funcția f este derivabilă și $f' = g$.*

DEMONSTRAȚIE: Vezi [5] vol. II pag.411

Observația 6.5.3 *Condiția ca seria de funcții $\sum_{n \geq 1} f'_n$ să fie uniform convergentă este esențială, dar nu necesară.*

Teorema 6.5.6 *Suma unei serii uniform convergente de funcții derivate pe un interval oarecare I este o funcție derivată.*

DEMONSTRAȚIE: Șirul (s_n) al sumelor parțiale asociat seriei $\sum_{n \geq 1} f_n$ de funcții derivate pe un interval I este un șir uniform convergent de funcții derivate pe I . Conform teoremei 6.2.5 limita s a șirului (s_n) este o funcție derivată.

Operații cu serii de funcții

Teorema 6.5.7 *Fie seriile de funcții $\sum_{n \geq 1} f_n$ și $\sum_{n \geq 1} g_n$ având mulțimile de convergență A_{c_1} respectiv A_{c_2} și sumele f respectiv g . Atunci:*

1. *Seria $\sum_{n \geq 1} (f_n + g_n)$ este convergentă pe mulțimea $A_{c_1} \cap A_{c_2}$ și are suma $f + g$.*
2. *Seria $\sum_{n \geq 1} \alpha f_n$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ este convergentă pe mulțimea A_{c_1} și are suma αf .*

DEMONSTRAȚIE: 1. Fie $x \in A_c$, unde A_c este mulțimea de convergență a seriei $\sum_{n \geq 1} (f_n + g_n)$. Seria de numere $\sum_{n \geq 1} (f_n(x) + g_n(x))$ este o serie convergentă \Leftrightarrow seriile $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ și $\sum_{n \geq 1} g_n(x)$ sunt convergente $\Leftrightarrow x \in A_{c_1} \cap A_{c_2}$.

Dacă $s_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ și $t_n = g_1 + g_2 + \dots + g_n$ atunci $s_n + t_n = f_1 + g_1 + f_2 + g_2 + \dots + f_n + g_n \rightarrow f + g$, deci $f + g$ este suma seriei $\sum_{n \geq 1} (f_n + g_n)$.

2. Seria $\sum_{n \geq 1} f_n$ este convergentă pe mulțimea A_{c_1} și are suma $f \Leftrightarrow s_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n \rightarrow f$ pe $A_{c_1} \Leftrightarrow \alpha s_n = \alpha f_1 + \alpha f_2 + \dots + \alpha f_n \rightarrow \alpha f$ pe $A_{c_1} \Leftrightarrow$ mulțimea de convergență a seriei $\sum_{n \geq 1} \alpha f_n$ este A_{c_1} , iar suma este αf .

6.6 Serii de puteri

Seriile de puteri sunt cazuri particulare de serii de funcții $\sum_{n \geq 0} f_n$ în care funcțiile $f_n(x)$ sunt de forma $a_n x^n$ sau $a_n(x-a)^n$, $x \in \mathbb{R}$. Deci o serie de puteri este de forma $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ sau $\sum_{n \geq 0} a_n(x-a)^n$. Caracteristic seriilor de puteri este faptul că sumele parțiale sunt funcții polinomiale, care sunt cele mai simple funcții, deci ușor de studiat. Cu ajutorul seriilor de puteri putem introduce funcții elementare ca funcții trigonometrice, funcții exponențiale, etc.

În continuare vom studia seriile de puteri de forma $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, deoarece cele de forma $\sum_{n \geq 0} a_n(x-a)^n$ se reduc la precedentele prin translația $y = x - a$.

Mulțimea de convergență a unei serii de puteri este alcătuită din cel puțin un punct, și anume $x = 0$. Pentru $x = 0$ suma unei serii de puteri este a_0 . Se poate ca pentru unele serii acest punct să fie singurul punct de convergență, iar alte serii să fie convergente pe \mathbb{R} .

În cele ce urmează vom studia mulțimea de convergență a seriilor de puteri.

Teorema 6.6.1 *Teorema I a lui Abel*

Pentru orice serie de puteri $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ există un număr R , $0 \leq R \leq +\infty$ astfel încât:

1. *Seria este absolut convergentă pe intervalul $(-R, R)$.*
2. *Seria este divergentă pentru orice x , cu $|x| > R$.*

Pentru a demonstra această teoremă vom arăta următoarea lema.

Lema 6.6.1 *Lema lui Abel*

- a) *Dacă o serie de puteri converge într-un punct $x_0 \neq 0$, atunci ea este absolut convergentă în orice punct x , cu $|x| < |x_0|$.*
- b) *Dacă o serie de puteri este divergentă într-un punct $x_0 \neq 0$, atunci ea este divergentă în orice punct x , cu $|x| > |x_0|$.*

DEMONSTRAȚIE. a) Fie $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ o serie de puteri și $x_0 \neq 0$ un punct de convergență al seriei. Atunci, deoarece $a_n x_0^n \rightarrow 0$, rezultă că șirul $(a_n x_0^n)$ este mărginit, deci $\exists M > 0$ astfel încât $|a_n x_0^n| < M$, $\forall n \geq 0$. Dacă x este astfel încât $|x| < |x_0|$, atunci $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$. Cum $|x| < |x_0|$, $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$, iar seria $\sum_{n \geq 0} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ este convergentă și, aplicând teorema 5.6.2, rezultă că seria $\sum_{n \geq 0} |a_n x^n|$ este convergentă în x , adică seria $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ este absolut convergentă în x , cu $|x| < |x_0|$.

b) Fie $x_0 \neq 0$ punct de divergență al seriei $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ și punctul x astfel ca $|x| > |x_0|$. Dacă punctul x ar fi punct de convergență, atunci din a) am avea x_0 punct de convergență, ceea ce este absurd.

Să demonstrăm în continuare teorema I a lui Abel. Notăm cu $M_c = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n \geq 0} a_n x^n \text{ este convergentă}\}$ mulțimea de convergență a seriei de puteri. $M_c \neq \emptyset$ (deoarece $0 \in M_c$) și $R = \sup M_c$. Evident $R \geq 0$ și distingem trei cazuri: i) dacă $R = 0$, ii) dacă $R = \infty$ și iii) dacă $R > 0$.

i) Dacă $R = 0$, atunci $x = 0$ este singurul punct de convergență, de unde rezultă că au loc 1) și 2).

ii) Dacă $R = \infty$, atunci 2) nu mai are sens. Rezultă că există puncte $x_0 > 0$ oricât de mari pentru care seria $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ este convergentă. Dacă x este astfel încât $|x| < x_0$, atunci din lema lui Abel a) obținem că x este punct de absolut convergență, adică seria de puteri este absolut convergentă pe \mathbb{R} .

iii) Dacă $0 < R < \infty$ fie x un punct astfel încât $|x| < R$. Rezultă din definiția marginii superioare exacte că există un punct $x_0 \in M_c$ astfel încât $|x| < x_0 < R$, adică x_0 este un punct de convergență al seriei de puteri. Din lema I a lui Abel punctul a), rezultă că x este un punct de absolut convergență al seriei de puteri.

Dacă $|x| > R$, atunci există un punct x astfel încât $R < x_1 < |x|$. Dacă seria de puteri ar fi convergentă în punctul x , atunci, conform teoremei lui Abel a), am avea că x_1 este punct de convergență al seriei date, adică $x_1 \in M_c$ și $x_1 > R$, ceea ce ar contrazice alegerea lui R și anume $R = \sup M_c$, deci seria nu este convergentă în punctul x și astfel teorema este demonstrată.

Definiția 6.6.1 Numărul $0 \leq R \leq +\infty$ definit în teorema I a lui Abel se numește raza de convergență a seriei $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Intervalul $(-R, R)$ se numește intervalul de convergență al seriei $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

Observația 6.6.1 Teorema I a lui Abel nu spune nimic despre comportarea seriei de puteri la capetele intervalului de convergență și asta deoarece comportarea diferă de la o serie la alta. De exemplu, seria $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ are raza de convergență $R = 1$, dar este convergentă pentru $x = -1$ și divergentă pentru $x = 1$. Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ are raza de convergență $R = 1$, dar este convergentă la ambele capete ale intervalului de convergență.

Dacă într-unul din punctele $-R$ sau R seria este absolut convergentă, atunci seria este absolut convergentă și în celălalt punct. Într-adevăr, seria modulelor seriilor $\sum_{n \geq 0} a_n (-R)^n$, respectiv $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ este aceeași. Prin urmare, dacă una dintre serii este absolut convergentă la fel este și cealaltă serie.

Calculul razei de convergență

Teorema I a lui Abel este doar o teoremă de existență a razei de convergență, dar nu și de calcul. Raza de convergență se determină folosind criteriile de convergență de la seriile cu termeni pozitivi.

Teorema 6.6.2 Teorema Cauchy-Hadamard (1865 - 1963)

Fie $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ o serie de puteri și R raza de convergență a seriei. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \omega$ atunci:

$$R = \begin{cases} \infty & , \text{ dacă } \omega = 0 \\ \frac{1}{\omega} & , \text{ dacă } 0 < \omega < \infty \\ 0 & , \text{ dacă } \omega = \infty \end{cases}$$

DEMONSTRAȚIE: Fie x_0 un punct oarecare. Aplicăm corolarul 5.6.2 seriei numerice $\sum_{n \geq 0} |a_n| |x_0|^n$. Avem $\sqrt[n]{|a_n| |x_0|^n} = \sqrt[n]{|a_n|} |x_0|$, deci

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| |x_0|^n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} |x_0| = \omega |x_0|.$$

Dacă $\omega = 0 \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| |x_0|^n} = 0 < 1$ așadar seria $\sum_{n \geq 0} a_n x_0^n$ este absolut convergentă $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, adică $R = \infty$. Dacă $\omega = \infty \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| |x_0|^n} = \infty > 1$, prin urmare seria $\sum_{n \geq 0} a_n x_0^n$ este divergentă $\forall x_0 \neq 0$, adică $R = 0$. Dacă $0 < \omega < \infty$, atunci, dacă $\omega |x_0| < 1$, adică $|x_0| < \frac{1}{\omega}$, seria $\sum_{n \geq 0} a_n x_0^n$ este absolut convergentă în $x_0 \Rightarrow |x_0| < R \Rightarrow R \leq \frac{1}{\omega}$. Dacă $R < \frac{1}{\omega}$ există un punct x_1 astfel încât $R < |x_1| < \frac{1}{\omega}$. Din $R < |x_1| \Rightarrow x_1$ este punct de divergență al seriei, iar din $|x_1| < \frac{1}{\omega} \Rightarrow \omega |x_1| < 1 \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| |x_1|^n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} |x_1| < 1 \Rightarrow x_1$ este punct de absolut convergență al seriei date, ceea ce este absurd.

Dacă $R > \frac{1}{\omega}$ există un punct x_2 astfel încât $R > |x_2| > \frac{1}{\omega} \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n||x_2|^n} > 1 \Rightarrow x_2$ este punct de divergență. Prin urmare $R = \frac{1}{\omega}$.

Corolarul 6.6.1 Fie $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ o serie de puteri și R raza sa de convergență. Dacă $\omega_1 = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ și $\omega_2 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, atunci $\frac{1}{\omega_2} \leq R \leq \frac{1}{\omega_1}$. Dacă există limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \omega$, atunci

$$R = \begin{cases} \infty & , \text{ dacă } \omega = 0 \\ \frac{1}{\omega} & , \text{ dacă } 0 < \omega < \infty \\ 0 & , \text{ dacă } \omega = \infty \end{cases}$$

DEMONSTRAȚIE: Într-adevăr,

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

deci $\frac{1}{\omega_2} \leq R \leq \frac{1}{\omega_1}$.

Exemplu 6.6.1 1. Seria de puteri $\sum_{n \geq 0} \frac{n x^n}{2^n}$ are raza de convergență $R = 2$. Într-adevăr $a_n = \frac{n}{2^n}$, iar

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2.$$

2. Seria de puteri $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ are raza de convergență $R = \infty$. Avem $a_n = \frac{1}{n!}$, iar

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = \infty.$$

3. Seria de puteri $\sum_{n \geq 0} n! x^n$ are raza de convergență $R = 0$. Avem $a_n = n!$, iar

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} n+1 = \infty \Rightarrow R = 0.$$

4. Fie seria de puteri $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n} x^n$. Avem $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n}$,

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Deci $R = \frac{1}{e}$, prin urmare seria este absolut convergentă pe $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$. Să studiem comportarea seriei la capetele intervalului.

Pentru $x = \frac{1}{e}$ avem $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n} \frac{1}{e^n}$. Cum șirul $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ converge monoton descrescător la e avem

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n} > e^n \Rightarrow a_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n}}{e^n} > 1,$$

așadar $a_n \not\rightarrow 0$, de unde rezultă că seria este divergentă în punctul $x = \frac{1}{e}$.

Pentru $x = -\frac{1}{e}$ avem $|a_n| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n} \frac{1}{e^n} > 1 \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0$, prin urmare și în acest punct seria este divergentă; $M_c = \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

5. Fie seria $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Avem $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow$ seria este absolut convergentă pe intervalul $(-1, 1)$.

Pentru $x = -1$ obținem seria $\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$ care, conform criteriului lui Leibniz, este o serie convergentă, iar pentru $x = 1$ obținem seria $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$, care din aceleași considerente este tot o serie convergentă. Așadar mulțimea de convergență este $M_c = [-1, 1]$.

6.7 Proprietăți ale seriilor de puteri

Teorema 6.7.1 Orice serie de puteri $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ este uniform convergentă pe orice interval de forma $[-r, r]$, unde $0 < r < R$, iar R este raza de convergență a seriei.

DEMONSTRAȚIE: Deoarece $0 < r < R$ seria $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ este absolut convergentă (conform teoremei I a lui Abel). Pentru orice punct x cu $|x| \leq r$ avem $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$ și, conform criteriului de convergență uniformă al lui Weierstrass, rezultă că seria $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ este uniform convergentă pentru orice $x \in [-r, r]$.

Corolarul 6.7.1 Suma s a unei serii de puteri $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ este o funcție continuă pe intervalul de convergență.

DEMONSTRAȚIE: Pentru orice $0 < r < R$ din teorema 6.7.1 seria de puteri este uniform convergentă pe $[-r, r]$ și, cum toți termenii seriei sunt funcții continue atunci, conform teoremei 6.5.1, rezultă că s este o funcție continuă pe $[-r, r]$, adică s este continuă pe $(-R, R)$.

Corolarul 6.7.2 Suma s a unei serii de puteri $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ este uniform continuă pe orice interval închis conținut în intervalul de convergență.

DEMONSTRAȚIE: Fie $[a, b] \subset (-R, R)$ un interval închis conținut în intervalul de convergență. Pe intervalul $[a, b]$ funcția s este continuă conform corolarului 6.7.1; intervalul fiind un compact rezultă din teorema 3.7.1 că funcția s este uniform continuă pe $[a, b]$.

Observația 6.7.1 Corolarul 6.7.1 nu spune nimic despre continuitatea funcției sumă s a unei serii de puteri $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ în punctele $x = -R$ sau $x = R$.

Teorema 6.7.2 Teorema a II-a a lui Abel

Fie $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ o serie de puteri și R raza sa de convergență. Dacă seria este convergentă în punctul $x = R$ (sau în punctul $x = -R$), atunci suma s a seriei este o funcție continuă în acest punct.

DEMONSTRAȚIE. Presupunem că seria $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ este convergentă în punctul $x = R$, adică seria numerică $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ este convergentă. Vom arăta că în această condiție seria $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ este uniform convergentă pe intervalul $[0, R]$.

Deoarece seria $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ este convergentă $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$ și $\forall p \geq 1$ avem $|a_{n+1} R^{n+1} + a_{n+2} R^{n+2} + \dots + a_{n+p} R^{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Notăm $\sigma_p = s_{n+p} - s_n$, unde (s_n) este șirul sumelor parțiale asociat seriei $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$; $|\sigma_p| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall p \geq 1$. Avem

$$\begin{aligned} a_{n+1}R^{n+1} &= s_{n+1} - s_n = \sigma_1 \\ a_{n+2}R^{n+2} &= (s_{n+2} - s_n) - (s_{n+1} - s_n) = \sigma_2 - \sigma_1 \\ &\vdots \\ a_{n+p}R^{n+p} &= (s_{n+p} - s_n) - (s_{n+p-1} - s_n) = \sigma_p - \sigma_{p-1}. \end{aligned}$$

Fie acum un punct $x \in [0, R]$ și notăm $y = \frac{x}{R} \Rightarrow x = yR$ și $0 \leq y \leq 1$. Pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$ avem $a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \dots + a_{n+p}x^{n+p} = a_{n+1}R^{n+1}y^{n+1} + a_{n+2}R^{n+2}y^{n+2} + \dots + a_{n+p}R^{n+p}y^{n+p} = \sigma_1 y^{n+1} + (\sigma_2 - \sigma_1)y^{n+2} + \dots + (\sigma_p - \sigma_{p-1})y^{n+p} = \sigma_1 y^{n+1}(1-y) + \sigma_2 y^{n+2}(1-y) + \dots + \sigma_{p-1} y^{n+p-1}(1-y) + \sigma_p y^{n+p} = y^{n+1}(1-y)(\sigma_1 + \sigma_2 y + \dots + \sigma_{p-1} y^{p-2}) + \sigma_p y^{n+p}$
 $|a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \dots + a_{n+p}x^{n+p}| \leq |y^{n+1}(1-y)(\sigma_1 + \sigma_2 y + \dots + \sigma_{p-1} y^{p-2})| + |\sigma_p y^{n+p}| = |y^{n+1}| |1-y| |\sigma_1 + \sigma_2 y + \dots + \sigma_{p-1} y^{p-2}| + |\sigma_p| y^{n+p} < (1-y) \frac{\varepsilon}{2} (1+y+\dots+y^{p-2}) + \frac{\varepsilon}{2} = (1-y) \frac{\varepsilon}{2} \frac{1-y^{p-1}}{1-y} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} (1-y^{p-1}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Conform criteriului general de convergență pentru serii de funcții, rezultă că seria $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[0, R]$. Cum termenii seriei sunt funcții continue din teorema 6.5.1, rezultă că suma s a seriei este o funcție continuă pe $[0, R]$, în particular, ea este continuă în punctul $x = R$. Analog se demonstrează în cazul $x = -R$.

Observația 6.7.2 Fie o serie de puteri $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ și R raza de convergență a seriei. Dacă seria este convergentă în punctul $x = R$, atunci $s(R) = \lim_{x \rightarrow R} s(x)$.

Exemplu 6.7.1 Fie seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$. Această serie are raza de convergență $R = 1$, deci intervalul de convergență este $(-1, 1)$. În punctul $x = -1$ seria este divergentă fiind seria armonică cu semn schimbat, iar în punctul $x = 1$ seria este convergentă conform criteriului lui Leibniz (serie armonică alternată). Vom arăta ulterior că pentru $\forall x$ cu $|x| < 1$ $s(x) = \ln(1+x)$ este suma seriei. Atunci $s(1) = \lim_{x \rightarrow 1} s(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln(1+x) = \ln 2$, adică suma seriei armonice alternate este $\ln 2$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

Derivarea seriilor de puteri

Fie seria de puteri $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Seria derivatelor este tot o serie de puteri obținută prin derivarea termen cu termen și anume $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$.

Teorema 6.7.3 Seria derivatelor a unei serii de puteri are aceeași rază de convergență ca și seria dată.

DEMONSTRAȚIE:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)a_{n+1}}{n a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Teorema 6.7.4 Suma unei serii de puteri este o funcție derivabilă pe intervalul de convergență și derivata ei este suma seriei derivatelor.

DEMONSTRAȚIE. Fie $|x_0| < R$ și $0 < r < R$ astfel încât $|x_0| < r$. Pe intervalul $[-r, r]$ seria derivatelor este uniform convergentă către funcția σ . Cum seria $\sum_{n \geq 0} a_n x_0^n$ este convergentă \Rightarrow seria $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[-r, r]$, suma s a ei este derivabilă pe $[-r, r]$ și $s' = \sigma$, deci s este derivabilă în x_0 și $s(x_0) = \sigma(x_0)$. Cum punctul x_0 a fost ales arbitrar din $(-R, R)$ rezultă că funcția s este derivabilă pe $(-R, R)$ și $s' = \sigma$.

Prin raționament recurent se obține:

Teorema 6.7.5 *Suma unei serii de puteri este derivabilă de orice ordin pe intervalul de convergență și derivata de ordinul $n, s^{(n)}$, este egală cu suma seriei derivatelor de ordinul n . Astfel, dacă se cunoaște suma unei serii, se obține prin derivare suma seriei derivatelor.*

Exemplu 6.7.2 1. Să se calculeze suma seriei $t(x) = \sum_{n \geq 1} n x^{n-1}$ pe intervalul $(-1, 1)$. Observăm că termenul general al acestei serii provine din derivarea lui x^n . Cum suma seriei $\sum_{n \geq 0} x^n$ este $s(x) = \frac{1}{1-x}$, rezultă că $t(x) = s'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $\forall x \in (-1, 1)$.

Integrarea seriilor de puteri

Teorema 6.7.6 *Orice serie de puteri poate fi integrată termen cu termen pe orice interval închis $[a, b] \subset (-R, R)$. Dacă $x \in (-R, R)$ și s este suma seriei $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ pe intervalul de convergență, atunci*

$$\int_0^x s(t) dt = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \dots$$

sau

$$\int_0^x s(t) dt = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

DEMONSTRAȚIE: Pe intervalul $[a, b]$ suma s a seriei $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ este o funcție continuă. De asemenea pe acest interval seria $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ este uniform convergentă și funcțiile $a_n x^n$ sunt continue. Avem $\int_0^x a_n t^n dt = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, $\forall n \geq 0$. Din teorema 6.5.2 avem

$$\int_0^x s(t) dt = \sum_{n \geq 0} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Teorema 6.7.7 *Seriile $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ și $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ au aceeași rază de convergență.*

DEMONSTRAȚIE:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{n+2} \frac{n+1}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Exemplu 6.7.3 1. Considerăm seria $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ care are raza de convergență $R = 1$, deci este convergentă pe $(-1, 1)$. Aplicând teorema 6.7.6, suma seriei $s(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ este $s(x) = \int_0^x \sigma(t) dt$, unde σ este suma seriei $\sum_{n \geq 0} x^n$. Cum $\sigma(t) = \frac{1}{1-t} \Rightarrow s(x) = -\ln(1-x)$, adică $\forall x \in (-1, 1)$

$$-\ln(1-x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

2. Considerăm seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$. Această serie are mulțimea de convergență $M_c = (-1, 1]$. Din teorema 6.7.6 suma seriei $s(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ este $s(x) = \int_0^x \sigma(t) dt$, unde σ este suma seriei $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$. Avem $\sigma(t) = \frac{1}{1+t} \Rightarrow s(x) = \ln(1+x)$, adică

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Suma seriei $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ se putea obține și din punctul 1, dacă înlocuim x cu $-x$ și înmulțim cu -1 .

3. Dacă în exemplul 1 înlocuim x cu $-x^2$ obținem

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots, x \in (-1, 1).$$

Dacă integram termen cu termen obținem

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots,$$

adică

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$$

4. Considerăm seria $\sum_{n \geq 1} n^2 x^n$ și vrem să-i calculăm suma ei pe intervalul de convergență $(-1, 1)$.

Știm că $\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1, 1)$, de unde prin derivare termen cu termen obținem $\sum_{n \geq 1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Înmulțim această relație cu x și iarăși derivăm termen cu termen. Avem

$$\sum_{n \geq 1} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Înmulțind cu x ultima relație obținem $\sum_{n \geq 1} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$, adică suma seriei căutate.

Operații cu serii de puteri

Teorema 6.7.8 Dacă $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ și $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ sunt două serii de puteri având razele de convergență R_1 , respectiv R_2 , atunci:

1) Suma (diferența) celor două serii este tot o serie de puteri care are raza de convergență $R \geq \inf(R_1, R_2)$.

2) Raza de convergență a seriei $\alpha \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} \alpha a_n x^n$, unde $\alpha \in \mathbb{R}^*$, este R_1 .

3) Produsul celor două serii de puteri este tot o serie de puteri care are raza de convergență $R \geq \inf(R_1, R_2)$.

DEMONSTRAȚIE: 1) Dacă x este un punct astfel încât $|x| < R_1$ și $|x| < R_2$, atunci seriile $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ și $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ sunt absolut convergente, de unde rezultă că și seria $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n$ este absolut convergentă și deci $R \geq \inf(R_1, R_2)$. Există cazuri când $R > \inf(R_1, R_2)$ și anume dacă $R_1 < \infty$ și $b_n = -a_n \Rightarrow R_2 = R_1$ și $R = \infty$. Dacă s și t sunt sumele celor două serii, atunci suma seriei $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n$, $\sigma(x) = s(x) + t(x)$, $\forall x$ cu $|x| < R$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha a_{n+1}}{\alpha a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \Rightarrow$ seria $\sum_{n \geq 0} \alpha a_n x^n$ are aceeași rază de convergență ca seria $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ și are suma $\tau(x) = \alpha s(x)$, $\forall x \in (-R_1, R_1)$.

3) Seria produs a celor două serii este $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right) x^n$ care este tot o serie de puteri. Dacă x este un punct astfel încât $|x| < R_1$ și $|x| < R_2$, atunci seriile $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ și $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ sunt absolut convergente. Din teorema lui Mertens rezultă că și seria produs $\sum_{n \geq 0} c_n$ este absolut convergentă, deci $R \geq \inf(R_1, R_2)$. Dacă γ este suma seriei produs avem $\gamma(x) = s(x)t(x)$, $\forall |x| < R$.

Exemplu 6.7.4 1. Să efectuăm produsul seriilor $\sum_{n \geq 0} x^n$ și $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{3^n}$; $a_n = 1, b_n = \frac{1}{3^n}$, $\forall n \geq 0$. Coeficienții seriei produs sunt

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i+j=n} \frac{1}{3^j} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{3^j} = \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{3^n} \right).$$

Razele de convergență ale seriilor date sunt $R_1 = 1$ respectiv $R_2 = 3$. Raza de convergență a seriei produs este $R \geq \min(1, 3) = 1$, $R = 1$.

Observația 6.7.3 Dacă seriile $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ și $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ au razele de convergență diferite, de exemplu $R_1 < R_2$, atunci pentru orice x cu $R_1 < |x| < R_2$ seria sumă (la fel și seria produs) a lor este divergentă, deoarece este suma dintre o serie divergentă și una convergentă. Prin urmare raza de convergență R a seriei sumă (produs) este $R = \min(R_1, R_2)$.

6.8 Seria Taylor. Dezvoltări în serii

Fie seria de puteri $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ având raza de convergență nenulă, $R \neq 0$ și s suma ei pe intervalul $(-R, R)$. Aplicând în mod succesiv teorema de derivare termen cu termen pe $(-R, R)$, obținem $s^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n x^{n-k}$, $\forall |x| < R$ și $\forall k \in \mathbb{N}$. Pentru $x = 0$ rezultă

$$s^{(k)}(0) = k! a_k \quad k \in \mathbb{N}, \quad (6.3)$$

adică $a_k = \frac{s^{(k)}(0)}{k!}$. Așadar, coeficienții unei serii de puteri cu raza de convergență $R \neq 0$ sunt determinați în mod unic de funcția suma prin relațiile (6.3), deci

$$s(x) = s(0) + \frac{s'(0)}{1!}x + \frac{s''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{s^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots, \quad \forall |x| < R.$$

Definiția 6.8.1 Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval, o funcție indefinit derivabilă și $x_0 \in I$. Perechiile (f, x_0) i se poate asocia o serie de puteri centrată în x_0 și anume $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ numită seria Taylor asociată funcției f în punctul x_0 .

Observația 6.8.1 Toate proprietățile seriilor de puteri se mențin și în cazul seriei Taylor (deoarece este tot o serie de puteri).

Problema care apare este dacă seria Taylor asociată unei funcții indefinit derivabile într-un punct x_0 care aparține domeniului funcției are și alte puncte de convergență în afară de $x = x_0$, adică dacă are raza de convergență diferită de zero. De asemenea, ne interesează dacă pe tot intervalul de convergență suma seriei Taylor coincide cu funcția dată f .

Fie funcția $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-a, 0] \\ e^{\frac{1}{x}}, & x \in (0, a] \end{cases}$. Funcția f este indefinit derivabilă în punctul $x_0 = 0$ și $f(0) = 0$, $\forall n \geq 0$. Ar rezulta că seria Taylor are toți termenii nuli, deci suma funcția nulă, dar care nu coincide cu funcția f .

Totuși în anumite condiții raza de convergență a seriei Taylor este nenulă și suma ei coincide cu funcția f .

Definiția 6.8.2 Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă. Spunem că funcția are derivate de orice ordin egal mărginite dacă $\exists M > 0$ astfel ca $|f^{(n)}(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$ și $\forall n \geq 0$.

Teorema 6.8.1 Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă, cu derivatele de orice ordin egal mărginite pe $[a, b]$. Atunci pentru orice punct $x_0 \in (a, b)$ seria Taylor asociată funcției f și punctului x_0 este uniform convergentă pe $[a, b]$ având ca sumă funcția f , adică

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \forall x \in [a, b].$$

DEMONSTRAȚIE: Fie (s_n) șirul sumelor parțiale asociat seriei Taylor, adică

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Scriem pentru funcția f și punctul $x_0 \in (a, b)$ formula lui Taylor cu rest Lagrange:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \cdots + \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

$x \in [a, b]$, unde ξ este cuprins între x_0 și x . Rezultă că

$$\begin{aligned} f(x) &= s_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x) - s_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad \forall x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Din ipoteză știm că derivatele de orice ordin ale funcției f sunt egal mărginite pe $[a, b]$, adică $\exists M > 0$ astfel încât $\forall x \in [a, b]$ și $\forall n \geq 0$ $|f^{(n)}(x)| \leq M$. Așadar

$$\begin{aligned} |f(x) - s_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| = \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)| |x - x_0|^{n+1} \leq \\ &\leq \frac{M}{(n+1)!} (b - a)^{n+1}, \quad \forall x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Seria $\sum_{n \geq 0} \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ este convergentă (criteriul raportului de la serii numerice), deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{M(b-a)^{n+2}}{(n+2)!}}{\frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n+2} = 0 < 1.$$

Această serie fiind convergentă, rezultă că termenul ei general tinde la zero, adică $\frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$. Deci $\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon) \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$ și $\forall x \in [a, b] |s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, adică $s_n \xrightarrow{UC} f$ pe $[a, b]$, prin urmare seria Taylor asociată funcției f și punctului x_0 este uniform convergentă pe $[a, b]$ și are ca sumă funcția f .

Definiția 6.8.3 Dacă în definiția 6.8.1 înlocuim x_0 cu 0, iar f este o funcție indefinit derivabilă în punctul $0 \in I$ obținem seria Mac-Laurin și anume $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Exemple de dezvoltări în serii

1. Funcții trigonometrice

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ $f(x) = \sin x$; $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$ și se arată ușor, prin inducție, că $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Cum $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că această funcție este suma seriei Mac-Laurin asociate, adică

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \forall x \in \mathbb{R}$$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ $f(x) = \cos x$; $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$ și se arată ușor, prin inducție, că $f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Cum $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că această funcția este suma seriei Mac-Laurin asociate, adică

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dezvoltarea în serie pentru $\operatorname{tg} x$ se obține prin împărțire $\frac{\sin x}{\cos x}$

2. Funcții exponențiale și hiperbolice

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Cum pentru $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [-a, a]$ $e^{-a} \leq f^{(n)}(x) \leq e^a$, unde $f^{(n)}(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ rezultă că e^x este suma seriei Mac-Laurin asociate, adică

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Înlocuind pe x cu $-x$ obținem

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pentru funcțiile $sh, ch : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $sh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ și $ch x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ avem

$$sh x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$ch x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \forall x \in \mathbb{R}$$

3. Seria binomului generalizat

Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = (1+x)^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Aplicăm formula Mac-Laurin acestei funcții

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \quad (6.4)$$

unde

$$R_n(x) = \frac{(1-\theta)^{n+1-p} f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Avem $f^{(k)}(x) = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1)(1+x)^{\lambda-k}$ și $f^{(k)}(0) = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1)$, $\forall k \geq 1$. Atunci (6.4) devine

$$f(x) = 1 + \frac{\lambda}{1!}x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!}x^n + R_n(x),$$

unde $R_n(x) = (1-\theta)^{n+1-p} \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n)x^{n+1}(1+\theta x)^{\lambda-n-1}$.

Luând $p = 1$ obținem

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{(1-\theta)^n}{n!} \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n)x^{n+1}(1+\theta x)^{\lambda-n-1}, \\ R_n(x) &= u_n(1-\theta)^n(1+\theta x)^{\lambda-n-1}, \end{aligned}$$

unde

$$u_n = \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n)}{n!} x^{n+1}.$$

Pentru $|x| < 1$, conform criteriului raportului D'Alambert, seria $\sum_{n \geq 0} u_n$ este absolut convergentă, deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda-n+1}{n+1} \right| |x| = |x| < 1.$$

Așadar $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Fie

$$v_n = (1-\theta)^n(1+\theta x)^{\lambda-n-1} = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n (1+\theta x)^{\lambda-1}.$$

Deoarece $\left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right| < 1$, atunci când $|x| < 1$, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$.

Prin urmare, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ și $|x| < 1$. Astfel, pentru $|x| < 1$ și $\lambda \in \mathbb{R}$, obținem următoarea dezvoltare în serie Mac-Laurin, numită seria binomului generalizat:

$$(1+x)^\lambda = 1 + \frac{\lambda}{1!}x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

Seria numerică

$$1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} + \dots + \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!} + \dots + \quad (6.5)$$

este absolut convergentă dacă $\lambda > 0$. Într-adevăr, conform criteriului Raabe-Duhamel avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left| \frac{n+1}{\lambda-n} \right| - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1-n+\lambda}{n-\lambda} \right) = \lambda + 1,$$

deci, dacă $\lambda > 0$, seria (6.5) este absolut convergentă. Obținem că seria binomului generalizat este convergentă pentru $x = \pm 1$, dacă $\lambda > 0$.

Seria numerică (6.5) este convergentă pentru $\lambda > -1$. Seria (6.5) fiind alternată e suficient ca termenul $\left| \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!} \right|$ să tindă către zero.

Scriem termenul general sub forma

$$v_n = (-1)^n \left(1 - \frac{\lambda+1}{1}\right) \left(1 - \frac{\lambda+1}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda+1}{n}\right).$$

Pentru $\lambda + 1 > 0$ rezultă $1 - \frac{\lambda+1}{k} < e^{-\frac{\lambda+1}{k}}$, de unde $|v_n| < e^{-(\lambda+1)(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})} \rightarrow 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$.

Seria binomului generalizat este convergentă pentru $x = 1$, dacă $\lambda > -1$.

Capitolul 7

Integrale generalizate

7.1 Integrale generalizate

Conceptul de integrală a fost definit pentru funcții mărginite pe intervale (mulțimi) compacte. Extinzând acest concept, renunțând la cel puțin una dintre aceste condiții, obținem integralele improprii sau generalizate. Punem problema integrabilității unei funcții nemărginite pe un interval nemărginit. Această problemă este un caz particular al unei probleme mai generale și anume aceea a integrabilității unei funcții pe un interval necompact în situația în care funcția este integrabilă pe orice subinterval compact. Se disting pe dreapta reală opt tipuri de intervale necompacte: $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) , $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$, (a, ∞) și $(-\infty, \infty)$, unde $a, b \in \mathbf{R}$ $a < b$.

Definiția 7.1.1 Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție. Funcția f se numește local integrabilă dacă este integrabilă pe orice interval compact inclus în I .

Definiția 7.1.2 Fie $f : [a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție local integrabilă, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \bar{\mathbf{R}}$ $a < b$. Definim funcția $F : [a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $\forall x \in [a, b)$. Perechea (f, F) se numește integrala improprie sau integrala generalizată a funcției f pe intervalul $[a, b)$ și se notează $\int_a^{b-a} f(x)dx$ sau $\int_a^b f(x)dx$ sau $\int_a^b f dx$.

Dacă $\lim_{x \rightarrow b} F(x) \in \mathbf{R}$ (există și este finită) atunci spunem despre integrala improprie $\int_a^b f dx$ că este convergentă. În caz contrar vom spune că integrala improprie $\int_a^b f dx$ este divergentă.

Exemplu 7.1.1 1. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Avem

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctg t \Big|_0^x = \arctg x - \arctg 0 = \arctg x,$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \frac{\pi}{2},$$

deci integrala $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ este convergentă pe $[0, \infty)$.

2. Fie $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$. Avem

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln \Big|_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty,$$

deci integrala $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ este divergentă pe $[1, \infty)$.

3. $f : [0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Avem

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_0^x = \arcsin x - \arcsin 0 = \arcsin x,$$

$$\lim_{x \nearrow 1} F(x) = \lim_{x \nearrow 1} \arcsin x = \frac{\pi}{2},$$

deci integrala $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ este convergentă pe $[0, 1)$.

Definiția 7.1.3 Fie $f : (a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție local integrabilă, $a \in \bar{\mathbf{R}}, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Definim funcția $F(a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ $F(x) = \int_x^b f(t) dt, \forall x \in [a, b]$. Perechea (f, F) se numește integrala improprie a funcției f pe intervalul $(a, b]$ și se notează $\int_{a+0}^b f(x) dx$ sau $\int_a^b f(x) dx$ sau $\int_a^b f dx$.

Dacă $\lim_{x \rightarrow a} F(x) \in \mathbf{R}$ (există și este finită), atunci spunem despre integrala improprie $\int_a^b f dx$ că este convergentă. În caz contrar vom spune că integrala improprie $\int_a^b f dx$ este divergentă.

Exemplu 7.1.2 1. $f : (0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ $\alpha \neq 1$.

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)} t^{-\alpha+1} \Big|_x^1 = \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right).$$

Există și este finită $\lim_{x \searrow 0} F(x) \Leftrightarrow \alpha < 1$. Așadar integrala $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ este convergentă $\Leftrightarrow \alpha < 1$.

2. $f : (0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = \ln x$, $F(x) = \int_x^1 \ln t dt = (t \ln t - t) \Big|_x^1 = x - 1 - x \ln x$ și $\lim_{x \searrow 0} F(x) = 0 \Rightarrow \int_0^1 \ln x dx$ este convergentă.

Fie $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție local integrabilă, $a, b \in \bar{\mathbf{R}}$ $a < b$. Atunci există $a < c < b$ astfel încât integralele $\int_a^c f(x) dx$ și $\int_c^b f(x) dx$ sunt convergente dacă și numai dacă $\int_a^b f(x) dx$ este convergentă, în care caz

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Exemplu 7.1.3 $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Integralele $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$, respectiv $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$ fiind convergente, rezultă că și integrala $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ este convergentă și $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi$.

7.2 Proprietăți ale integralelor improprii

Teorema 7.2.1 Dacă $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două funcții local integrabile, $a < b, a \in \mathbb{R}, b \in \bar{\mathbb{R}}$ și integralele $\int_a^b f dx$ și $\int_a^b g dx$ sunt convergente, atunci și integrala $\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx$ este convergentă, unde α, β sunt constante reale.

DEMONSTRAȚIE. Notăm $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ și $H(x) = \int_a^x [\alpha f(t) + \beta g(t)] dt$, $\forall x \in [a, b)$. Avem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow b} H(x) &= \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x [\alpha f(t) + \beta g(t)] dt = \lim_{x \rightarrow b} \left[\alpha \int_a^x f(t) dt + \beta \int_a^x g(t) dt \right] = \\ &= \alpha \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt + \beta \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x g(t) dt = \alpha \lim_{x \rightarrow b} F(x) + \beta \lim_{x \rightarrow b} G(x). \end{aligned}$$

Cum $\exists \lim_{x \rightarrow b} F(x), \lim_{x \rightarrow b} G(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow b} H(x) \in \mathbb{R}$, adică integrala $\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx$ este convergentă.

Teorema 7.2.2 Dacă $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție local integrabilă, $a < b, a \in \mathbb{R}, b \in \bar{\mathbb{R}}$ și $c \in (a, b)$, atunci integralele $\int_a^b f dx$ și $\int_c^b f dx$ au aceeași natură.

DEMONSTRAȚIE. Fie $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $G(x) = \int_c^x f(t) dt$, $\forall x \in [a, b)$ și $I = \int_a^c f(t) dt$. Avem $F(x) = I + G(x)$ de unde $\lim_{x \rightarrow b} F(x) = I + \lim_{x \rightarrow b} G(x)$. Așadar $\lim_{x \rightarrow b} F(x)$ există și este finită $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b} G(x)$ există și este finită.

7.3 Criterii de convergență

Observăm că convergența unei integrale improprii se reduce la existența și finititudinea limitei funcției F .

Teorema 7.3.1 Criteriul general de convergență al lui Cauchy

Fie $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție local integrabilă, $a < b, a \in \mathbb{R}$ și $b \in \bar{\mathbb{R}}$. Integrala $\int_a^b f dx$ este convergentă dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon, a < b_\varepsilon < b$, astfel încât $\forall b_\varepsilon < x < y < b$ să avem $\left| \int_x^y f(t) dt \right| < \varepsilon$.

DEMONSTRAȚIE: Fie $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Atunci enunțul teoremei se poate reformula astfel: integrala $\int_a^b f dx$ este convergentă dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon, a < b_\varepsilon < b$ astfel încât $\forall b_\varepsilon < x < y < b$ să avem $|F(y) - F(x)| < \varepsilon$.

Dar integrala $\int_a^b f dx$ este convergentă $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b} F(x)$ există și este finită ceea ce este echivalent, conform teoremei Cauchy-Bolzano, cu $\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in [a, b)$ astfel încât $\forall b_\varepsilon < x < y < b$ $|F(y) - F(x)| < \varepsilon$ și demonstrația teoremei este încheiată.

Definiția 7.3.1 Fie $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție local integrabilă, $a < b$, $a \in \mathbb{R}$ și $b \in \bar{\mathbb{R}}$. Integrala $\int_a^b f dx$ este absolut convergentă dacă integrala $\int_a^b |f| dx$ este convergentă.

Teorema 7.3.2 Fie $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție local integrabilă, $a < b$, $a \in \mathbb{R}$ și $b \in \bar{\mathbb{R}}$. Dacă integrala $\int_a^b f dx$ este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.

DEMONSTRAȚIE. Dacă $\int_a^b f dx$ este absolut convergentă, atunci conform criteriului lui Cauchy avem pentru orice $\varepsilon > 0$, $\exists b_\varepsilon$, $a < b_\varepsilon < b$ astfel încât $\forall b_\varepsilon < x < y < b$ $\left| \int_x^y |f(t)| dt \right| < \varepsilon$.
Însă $\left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \int_x^y |f(t)| dt$, deci $\forall b_\varepsilon < x < y < b$ avem $\left| \int_x^y f(t) dt \right| < \varepsilon$ și, aplicând criteriul lui Cauchy, rezultă că integrala $\int_a^b f dx$ este convergentă.

Observația 7.3.1 Din teorema 7.3.2 rezultă că integrabilitatea funcției $|f|$ implică integrabilitatea funcției f (reciproca nu are loc), deși știm că pe un interval compact reciproca este adevărată dar afirmația de mai sus nu are loc în general.

Teorema 7.3.3 Criteriu de comparație cu inegalități

Fie $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții local integrabile, $a < b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$ și $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b)$. Dacă $|f(x)| \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b)$ și integrala $\int_a^b g dx$ este convergentă, atunci integrala $\int_a^b f dx$ este absolut convergentă.

DEMONSTRAȚIE: Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\int_a^b g dx$ este convergentă rezultă, conform teoremei 7.3.1, că există b_ε , $a < b_\varepsilon < b$ astfel încât $\forall b_\varepsilon < x < y < b$ să avem $\left| \int_x^y g(t) dt \right| < \varepsilon$. Dar, cum $\int_x^y |f(t)| dt \leq \int_x^y g(t) dt$, rezultă conform teoremelor 7.3.1 și 7.3.2 că integrala $\int_a^b f dx$ este absolut convergentă.

Exemplu 7.3.1 Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = e^{-x^2}$. Conform teoremei 7.2.2 e suficient să studiem natura integralei $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$; $\forall x \geq 1$ avem $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, iar integrala $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$ este convergentă, deoarece

$$F(x) = \int_1^x e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_1^x = e^{-1} - e^{-x} \rightarrow \frac{1}{e}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Așadar, conform criteriului comparației, integrala $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$ este convergentă, de unde rezultă că integrala $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ este convergentă.

Observația 7.3.2 Fie $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții local integrabile, $a < b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$ și $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b)$. Dacă $|f(x)| \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b)$ și integrala $\int_a^b f dx$ este divergentă, atunci și integrala $\int_a^b g dx$ este divergentă.

Teorema 7.3.4 *Criteriu de comparație la limită*

Dacă $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două funcții local integrabile, $a < b$, $a \in \mathbb{R}$ și $b \in \bar{\mathbb{R}}$, $g(x) > 0$, $\forall x \in [a, b)$ și astfel încât există limita $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$, atunci:

1. Dacă integrala $\int_a^b g dx$ este convergentă, rezultă că și integrala $\int_a^b f dx$ este absolut convergentă;
2. Dacă $l \neq 0$, rezultă că cele două integrale au aceeași natură.

DEMONSTRAȚIE: 1. $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b} \frac{|f(x)|}{g(x)} = |l|$, de unde $\forall \varepsilon > 0$, $\exists b_\varepsilon$, $a < b_\varepsilon < b$ astfel încât $\forall b_\varepsilon < x < b$ să avem $|l| - \varepsilon < \frac{|f(x)|}{g(x)} < |l| + \varepsilon$. Dar, fiindcă $g(x) > 0$, rezultă $|f(x)| < (|l| + \varepsilon)g(x)$ pentru $b_\varepsilon < x < b$. Cum integrala $\int_a^b g dx$ este convergentă pe baza teoremei 7.2.2 rezultă că integrala $\int_{b_\varepsilon}^b g dx$ este convergentă și din criteriul comparației cu inegalități avem absolut convergența integralei $\int_{b_\varepsilon}^b f dx$, adică absolut convergența integralei $\int_a^b f dx$ (din teorema 7.2.2).

2. $l \neq 0$ atunci $\lim_{x \rightarrow b} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{l} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b} \frac{g(x)}{|f(x)|} = \frac{1}{|l|}$ și aplicăm punctul 1 al teoremei.

Un rol important în folosirea criteriilor de comparație îl joacă următoarele integrale $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ și $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ ($a > 0$). Pentru $\alpha \neq 1$ avem

$$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \left. \frac{-(b-t)^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right|_a^x = \frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{(b-x)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}.$$

Există și este finită limita $\lim_{x \rightarrow b} F(x) = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Leftrightarrow \alpha < 1$. Pentru $\alpha = 1$ avem $F(x) = \int_a^x \frac{dt}{b-t} = -\ln(b-t)|_a^x = -\ln(b-x) + \ln(b-a)$ și $\lim_{x \rightarrow b} F(x) = \infty$. Deci integrala $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha < 1$ și divergentă pentru $\alpha \geq 1$.

În cazul celei de-a doua integrale, pentru $\alpha \neq 1$ avem

$$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \left. \frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \right|_a^x = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Există și este finită limita $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} \Leftrightarrow \alpha < 1$. Pentru $\alpha = 1$ avem $F(x) = \int_a^x \frac{dt}{t} = \ln t|_a^x = \ln x - \ln a \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty$. Deci integrala $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Teorema 7.3.5 Dacă $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție local integrabilă, $a \in \mathbb{R}$, astfel încât există limita $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = l$, atunci:

1. Dacă $\alpha > 1$ și $0 \leq l < \infty$, integrala $\int_a^\infty f dx$ este absolut convergentă;
2. Dacă $\alpha \leq 1$ și $0 < l \leq \infty$, integrala $\int_a^\infty f dx$ este divergentă.

DEMONSTRAȚIE: 1. Fie $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Avem $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ și, cum pentru $\alpha > 1$ integrala $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ este convergentă, aplicăm punctul 1 al criteriului de comparație la limită, deci integrala $\int_a^\infty f dx$ este absolut convergentă.

2. Pentru $\alpha \leq 1$ integrala $\int_a^\infty g dx$ este divergentă, iar din punctul 2 al criteriului de comparație la limită, avem că integrala $\int_a^\infty f dx$ este divergentă.

Exemplu 7.3.2 1. Să studiem natura integralei $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1$ pentru $\alpha = 1$ și deci integrala este divergentă.

2. $\int_1^\infty \frac{\arctg x}{x^2} dx$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctg x}{x^2} = \frac{\pi}{2}$ pentru $\alpha = 2$, deci integrala este convergentă.

Teorema 7.3.6 Dacă $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție local integrabilă, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât există limita $\lim_{x \nearrow b} (b-x)^\alpha f(x) = l$, atunci:

1. Dacă $\alpha < 1$ și $0 \leq l < \infty$, integrala $\int_a^b f dx$ este convergentă.

2. Dacă $\alpha \geq 1$ și $0 < l \leq \infty$, integrala $\int_a^b f dx$ este divergentă.

DEMONSTRAȚIE: 1. Fie $g(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$. Avem $\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ și, întrucât pentru $\alpha < 1$ integrala $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ este convergentă, aplicând punctul 1 al criteriului de comparație la limită, rezultă că integrala $\int_a^b f dx$ este convergentă.

2. Pentru $\alpha \geq 1$ integrala $\int_a^b g dx$ este divergentă și, din punctul 2 al criteriului de comparație la limită, avem că și integrala $\int_a^b f dx$ este divergentă.

Exemplu 7.3.3 1. $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\lim_{x \nearrow 1} (1-x)^\alpha \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, deci integrala este convergentă.

2. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$; $\lim_{x \nearrow 1} (1-x)^\alpha \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}$ pentru $\alpha = 1$, deci integrala este divergentă.

Teorema 7.3.7 Dacă $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție local integrabilă, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât există limita $\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^\alpha f(x) = l$, atunci:

1. Dacă $\alpha < 1$ și $0 \leq l < \infty$, integrala $\int_a^b f dx$ este convergentă;

2. Dacă $\alpha \geq 1$ și $0 < l \leq \infty$, integrala $\int_a^b f dx$ este divergentă.

Teorema 7.3.8 *Criteriul integral al lui Cauchy*

Dacă $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție reală, pozitivă și descrescătoare pe $[1, \infty)$, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. șirul (u_n) , $u_n = \int_1^n f(x) dx$ este convergent;

2. seria numerică $\sum_{n \geq 1} f(n)$ este convergentă;

3. integrala $\int_1^\infty f(x) dx$ este convergentă.

DEMONSTRAȚIE: $1 \Leftrightarrow 2$ Deoarece f este descrescătoare și pozitivă, rezultă că $f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x) dx \leq f(n-1)$, $\forall n \geq 2$ și atunci

$$\sum_{k=1}^n f(k) - f(1) \leq u_n = \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \quad (7.1)$$

Dacă șirul (u_n) este convergent, rezultă că el este mărginit, deci există $M > 0$ astfel încât

$$u_n \leq M, \quad \forall n \geq 1 \quad (7.2)$$

Dacă notăm $s_n = \sum_{k=1}^n f(k)$, șirul sumelor parțiale asociat seriei $\sum_{n \geq 1} f(n)$, atunci din (7.1) și (7.2) obținem $s_n \leq f(1) + M$, $\forall n \geq 1$, adică șirul (s_n) al sumelor parțiale este mărginit. Din teorema 5.6.1 rezultă că seria $\sum_{n \geq 1} f(n)$ este convergentă.

Presupunând acum, că seria $\sum_{n \geq 1} f(n)$ este convergentă, avem că șirul (s_n) este mărginit, deci există $M_1 > 0$ astfel încât $s_n \leq M_1$, $\forall n \geq 1$. Din (7.1) avem $u_n \leq M_1$, $\forall n \geq 1$, adică șirul (u_n) este mărginit și, cum el este și descrescător, rezultă că (u_n) este convergent.

$1 \Rightarrow 3$ Presupunem șirul (u_n) convergent și notăm $F : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(t) = \int_1^t f(x) dx.$$

Întrucât $\forall t_1, t_2 \in [1, \infty)$ cu $t_1 \leq t_2$ avem $F(t_1) \leq F(t_2)$ și cum $[t] \leq t < [t] + 1 = [t + 1]$ avem

$$\int_1^t f(x) dx < \int_1^{[t+1]} f(x) dx = \int_1^t f(x) dx + \int_t^{[t+1]} f(x) dx,$$

de unde $\forall t \in [1, \infty)$ $F(t) < u_{[t+1]}$. Deoarece șirul (u_n) este mărginit (fiind convergent), rezultă că $\exists M > 0$ astfel încât $u_n \leq M$, $\forall n \geq 1$. Prin urmare, $\forall t \in [1, \infty)$ $F(t) < M$, deci $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) \in \mathbb{R}$,

de unde avem că integrala $\int_1^\infty f(x) dx$ convergentă.

$3 \Rightarrow 1$ Presupunem integrala $\int_1^\infty f dx$ convergentă. Atunci există $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \in \mathbb{R}$, deci $\forall x_n \rightarrow \infty$ șirul $(F(x_n))$ este convergent. Alegând $x_n = n$ obținem $F(n) = u_n$, adică șirul (u_n) convergent.

Exemplu 7.3.4 1. Pentru a afla natura integralei $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ folosim criteriul integral al lui Cauchy. Considerăm funcția $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Seria armonică generalizată

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leq 1$. Așadar integrala $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

2. Seria $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ are aceeași natură cu integrala $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$, convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Teorema 7.3.9 *Criteriul lui Abel*

Dacă $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două funcții de clasă $C^1[a, \infty)$ astfel ca $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ și $\int_a^\infty f' dx$ să fie absolut convergentă, g continuă, iar funcția $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ mărginită pe $[a, \infty)$, atunci $\int_a^\infty fg dx$ este convergentă.

DEMONSTRAȚIE: G mărginită $\Rightarrow \exists M > 0$ astfel încât $|G(x)| \leq M$ pentru orice $x \in [a, \infty)$.

$$\begin{aligned} \int_a^x (fg)(t) dt &= (fG)(t)|_a^x - \int_a^x (f'G)(t) dt, \quad \forall x \in [a, \infty), \\ \int_a^x (fg)(t) dt &= f(x)G(x) - \int_a^x (f'G)(t) dt \leq f(x)G(x) - M \int_a^x f'(t) dt, \\ |(f'G)(t)| &\leq M|f'(t)|, \quad \forall t \in [a, \infty). \end{aligned}$$

Fiindcă există și este finită limita $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)G(x) - M \int_a^x f'(t) dt]$, atunci există și este finită limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x (fg)(t) dt$, prin urmare integrala $\int_a^\infty fg dx$ este convergentă.

Exemplu 7.3.5 Integrala $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}$ este absolut convergentă.

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f \in C^1(1, \infty), \quad \int_1^\infty |f'| dx = \int_1^\infty \left| -\frac{1}{x^2} \right| dx; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{t} \Big|_1^x \right) = 1,$$

deci integrala $\int_1^\infty f' dx$ este absolut convergentă.

$g(x) = \sin x$ este continuă, $G(x) = \int_1^x \sin t dt = -\cos t|_1^x = \cos 1 - \cos x$ este mărginită.

Atunci, conform criteriului lui Abel, integrala $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ este convergentă.

Capitolul 8

Integrale curbilinii

8.1 Drumuri. Curbe

Definiția 8.1.1 Fie $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un interval. Orice funcție continuă $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se numește drum în \mathbb{R}^n .

În $F = F[a, b]$ se numește urma drumului (sau traiectoria sau holograf drumului).

Dacă $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ cu $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i \in C^0[a, b]$, atunci

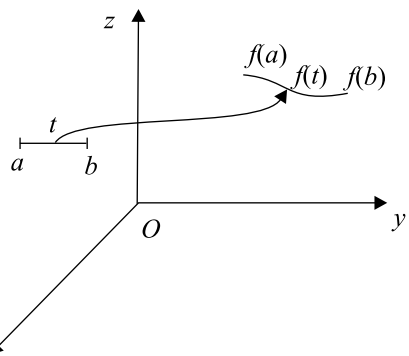
$$d : \begin{cases} x_1 = f_1(t) \\ x_2 = f_2(t) \\ \vdots \\ x_n = f_n(t) \end{cases}, t \in [a, b], \text{ se numește reprezentarea parametrică a drumului } F.$$


Figura 8.1:

Exemplu 8.1.1 1. $F : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ $F(t) = (\cos t, \sin t)$ este drum în \mathbb{R}^2 . Reprezentarea parametrică a acestui drum este $d_1 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [0, \pi]$.

2. $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ $F(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ este drum în \mathbb{R}^2 , care are aceeași traiectorie ca și drumul d_1 , dar parcursă în sens contrar și reprezentarea parametrică $d_2 : \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}, t \in [-1, 1]$.

Definiția 8.1.2 Dacă $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ este un drum în \mathbb{R}^n , atunci $F(a)$ și $F(b)$ se numesc extremitățile drumului. Dacă $F(a) = F(b)$, atunci drumul se numește drum închis.

În drumul d_1 (exemplul 8.1.1), dacă $t \in [0, 2\pi]$, atunci acesta este închis.

Definiția 8.1.3 Dacă pentru un drum $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C^1([a, b])$ și $F'(t) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, pentru orice $t \in [a, b]$ (adică $f_1'^2(t) + f_2'^2(t) + \dots + f_n'^2(t) > 0$ pentru orice $t \in [a, b]$), atunci acesta se numește drum neted.

Drumurile $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ și $G : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se numesc *juxtapozabile*, dacă $b = c$ și $F(b) = G(c)$. În acest caz drumul $H : [a, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$, definit prin $H(t) = \begin{cases} F(t), & t \in [a, b] \\ G(t), & t \in [b, d] \end{cases}$ se numește *juxtapunerea* (sau *concatenarea*) drumurilor F și G și se notează $H = F \cup G$.

În figura 2 avem un exemplu de drumuri juxtapozabile în \mathbb{R}^3 .

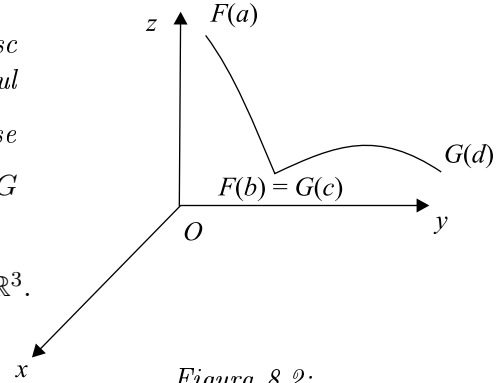


Figura 8.2:

Definiția 8.1.4 Un drum $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se numește *neted pe porțiuni* dacă el este juxtapunerea unui număr finit de drumuri netede.

În continuare vom presupune că F este un drum în spațiu tridimensional \mathbb{R}^3 .

Fie $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ un drum în \mathbb{R}^3 având reprezentarea parametrică

$$d : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b], \quad f, g, h \in C^0[a, b] \quad (8.1)$$

și $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Punctele $M_0(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$, $M_1(f(t_1), g(t_1), h(t_1))$, \dots , $M_n(f(t_n), g(t_n), h(t_n))$ determină o linie poligonală ce are vârfurile situate pe $\text{Im} F$, iar M_0 și M_n reprezintă extremitățile drumului F .

Lungimea acestei linii poligonale, l_Δ , este

$$l_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} [(f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 + (g(t_{i+1}) - g(t_i))^2 + (h(t_{i+1}) - h(t_i))^2]^{1/2} \quad (8.2)$$

Se observă că, dacă se înlocuiește diviziunea Δ cu o diviziune mai fină, l_Δ crește.

Definiția 8.1.5 Un drum $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ se numește *rectificabil* dacă mulțimea $\{l_\Delta\}$ este majorată. Marginea superioară a acestei mulțimi se numește *lungimea drumului F* și se notează $l(d) = \sup_{\Delta \in \mathcal{D}} l_\Delta$, unde \mathcal{D} = mulțimea tuturor diviziunilor intervalului $[a, b]$.

Definiția 8.1.6 Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Numărul real pozitiv

$$V_\Delta = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \dots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

se numește *variația funcției f relativă la diviziunea Δ* .

Funcția f se numește *cu variație mărginită pe intervalul $[a, b]$* dacă există un număr $M > 0$ astfel încât $V_\Delta \leq M$, $\forall \Delta \in \mathcal{D}$.

Teorema 8.1.1 *Criteriu de rectificabilitate al lui Jordan*

Drumul d având reprezentarea parametrică (8.1) este rectificabil dacă și numai dacă funcțiile f, g, h sunt cu variație mărginită.

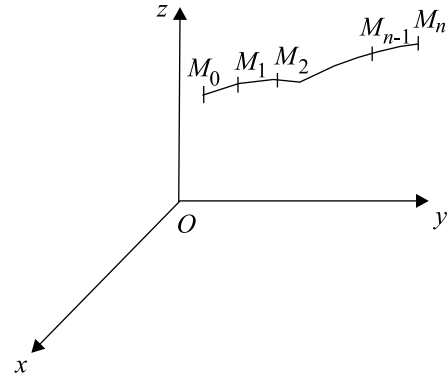


Figura 8.3:

DEMONSTRAȚIE. Sumele

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|, \sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|, \sum_{i=0}^{n-1} |h(t_{i+1}) - h(t_i)| \quad (8.3)$$

sunt mai mici decât

$$\sum_{i=0}^{n-1} [(f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 + (g(t_{i+1}) - g(t_i))^2 + (h(t_{i+1}) - h(t_i))^2]^{1/2} \quad (8.4)$$

Dacă drumul d este rectificabil, atunci suma (8.4) este majorată, deci sunt majorate și sumele (8.3), adică funcțiile f, g, h sunt cu variație mărginită.

Invers, presupunem funcțiile f, g, h cu variație mărginită. Cum

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} [(f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 + (g(t_{i+1}) - g(t_i))^2 + (h(t_{i+1}) - h(t_i))^2]^{1/2} &\leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| + |g(t_{i+1}) - g(t_i)| + |h(t_{i+1}) - h(t_i)|, \end{aligned}$$

iar suma din dreapta este majorată (f, g, h cu variație mărginită), atunci $\{l_\Delta\}$ este majorată, adică drumul d este rectificabil.

Teorema 8.1.2 *Orice drum neted d de forma (8.1) este rectificabil și lungimea drumului este*

$$l(d) = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)} dt.$$

DEMONSTRAȚIE. Întrucât $f, g, h \in C^1[a, b]$, rezultă că ele sunt cu variație mărginită și conform teoremei 8.1.1 drumul d este rectificabil.

Fie $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$.

Aplicând teorema creșterilor finite a lui Lagrange pe fiecare subinterval $[t_i, t_{i+1}] \subset [a, b]$ se obțin punctele $t_i < \xi_i, \eta_i, \zeta_i < t_{i+1}$ astfel încât

$$\begin{aligned} f(t_{i+1}) - f(t_i) &= f'(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) \\ g(t_{i+1}) - g(t_i) &= g'(\eta_i)(t_{i+1} - t_i) \\ h(t_{i+1}) - h(t_i) &= h'(\zeta_i)(t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Atunci relația (8.2) devine

$$\begin{aligned} l_\Delta &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(\eta_i) + h'^2(\zeta_i)}(t_{i+1} - t_i) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{f'^2(\tau_i) + g'^2(\tau_i) + h'^2(\tau_i)}(t_{i+1} - t_i) + \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(\eta_i) + h'^2(\zeta_i)} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{f'^2(\tau_i) + g'^2(\tau_i) + h'^2(\tau_i)} \right] (t_{i+1} - t_i), \end{aligned} \quad (8.5)$$

pentru orice $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$.

Considerăm funcția $G : [a, b] \times [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, unde

$$G(x, y, z) = \sqrt{f'^2(x) + g'^2(y) + h'^2(z)}, \quad \forall x, y, z \in [a, b].$$

Funcția G este continuă pe mulțimea $D = [a, b] \times [a, b] \times [a, b]$, deci uniform continuă pe D . Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $(x, y, z), (x', y', z') \in D$ cu $|x - x'| < \delta(\varepsilon)$, $|y - y'| < \delta(\varepsilon)$ și $|z - z'| < \delta(\varepsilon)$ avem $|G(x, y, z) - G(x', y', z')| < \varepsilon$.

Alegem diviziunea Δ a intervalului $[a, b]$ astfel încât $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$, iar $(x, y, z) = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $(x', y', z') = (\tau_i, \tau_i, \tau_i)$.

Atunci pentru a doua sumă din (8.5) obținem

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=0}^{n-1} [G(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) - G(\tau_i, \tau_i, \tau_i)](t_{i+1} - t_i) \right| \leq \\ & \leq \sum_{i=0}^{n-1} |G(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) - G(\tau_i, \tau_i, \tau_i)|(t_{i+1} - t_i) < \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

Prima sumă din (8.5) $\sum_{i=0}^{n-1} G(\tau_i, \tau_i, \tau_i)(t_{i+1} - t_i)$, reprezintă o sumă Riemann corespunzătoare funcției $\sqrt{f'^2 + g'^2 + h'^2}$, diviziunii Δ și punctelor intermediare τ_i . Funcția $\sqrt{f'^2 + g'^2 + h'^2}$ fiind continuă pe $[a, b]$ este integrabilă pe acest interval.

Dacă (Δ_n) este un șir de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu norma $\nu(\Delta_n) \rightarrow 0$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_{\Delta_n} = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)} dt.$$

Definiția 8.1.7 Două drumuri $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ și $G : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ se numesc echivalente și se notează $F \sim G$ (sau $d \sim d'$ unde d, d' sunt reprezentările parametrice ale lui F și G) dacă există o funcție $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ continuă, strict crescătoare cu $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$ și astfel ca $F(t) = G(\varphi(t))$, pentru orice $t \in [a, b]$.

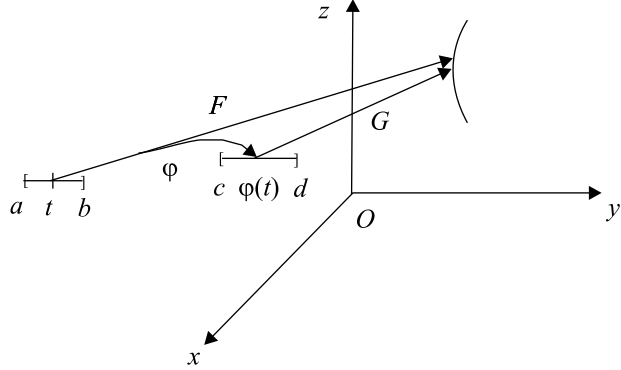


Figura 8.4:

Observația 8.1.1 Deoarece $\varphi([a, b]) = [c, d]$, rezultă că două drumuri echivalente au aceeași imagine.

Teorema 8.1.3 Orice drum echivalent cu un drum rectificabil este rectificabil.

DEMONSTRAȚIE. Fie drumurile echivalente $d_1 : \begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \\ z = h_1(t) \end{cases}, t \in [a, b]$ și $d_2 : \begin{cases} x = f_2(t) \\ y = g_2(t) \\ z = h_2(t) \end{cases}, t \in [c, d]$.

Deoarece $d_1 \sim d_2$, rezultă existența funcției $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ continuă, strict crescătoare cu $\varphi(a) = c, \varphi(b) = d$, $f_1(t) = f_2(\varphi(t))$, $g_1(t) = g_2(\varphi(t))$ și $h_1(t) = h_2(\varphi(t))$, pentru orice $t \in [a, b]$.

Orice diviziune $\Delta_2 : c = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_n = d$ a intervalului $[c, d]$ este imaginea prin φ a unei diviziuni $\Delta_1 : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ a intervalului $[a, b]$. Reciproc, oricărei diviziuni Δ_1 a intervalului $[a, b]$ îi corespunde o diviziune Δ_2 a intervalului $[c, d]$. Deci

$$\begin{aligned} l_{\Delta_1} &= \sum_{i=0}^{n-1} [(f_1(t_{i+1}) - f_1(t_i))^2 + (g_1(t_{i+1}) - g_1(t_i))^2 + (h_1(t_{i+1}) - h_1(t_i))^2]^{1/2} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} [(f_2(t'_{i+1}) - f_2(t'_i))^2 + (g_2(t'_{i+1}) - g_2(t'_i))^2 + (h_2(t'_{i+1}) - h_2(t'_i))^2]^{1/2} = l_{\Delta_2}. \end{aligned}$$

Dacă d_2 este drum rectificabil, atunci mulțimea $\{l_{\Delta_2}\}$ este majorată. Cum mulțimile $\{l_{\Delta_1}\}, \{l_{\Delta_2}\}$ coincid, rezultă că și $\{l_{\Delta_1}\}$ este majorată, prin urmare drumul d_1 este rectificabil.

Mai mult, două drumuri rectificabile și echivalente au aceeași lungime.

Teorema 8.1.4 *Relația ” \sim ” din definiția 8.1.7 este o relație de echivalență.*

DEMONSTRAȚIE. Relația ” \sim ” este reflexivă, deoarece luând $\varphi = 1_{[a,b]}$, pentru orice drum F avem $F \sim F$.

Dacă $F_1 \sim F_2$, $F_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$, atunci există funcția $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ continuă, strict crescătoare cu $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$ și $F_1(t) = F_2(\varphi(t))$, pentru orice $t \in [a, b]$. Funcția φ fiind bijectivă, φ^{-1} este continuă, strict crescătoare, $\varphi^{-1}(c) = a$, $\varphi^{-1}(d) = b$ și $F_2(t) = F_1(\varphi^{-1}(t))$, pentru orice $t \in [c, d]$, adică $F_2 \sim F_1$.

Dacă $F_1 \sim F_2$ și $F_2 \sim F_3$, $F_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F_3 : [e, f] \rightarrow \mathbb{R}^3$, atunci există funcțiile $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$, $\psi : [c, d] \rightarrow [e, f]$ continue, strict crescătoare cu $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$, $\psi(c) = e$, $\psi(d) = f$ și astfel ca $F_1(t) = F_2(\varphi(t))$, $F_2(t) = F_3(\psi(t))$. Funcția $\psi \circ \varphi : [a, b] \rightarrow [e, f]$ este continuă, strict crescătoare, $(\psi \circ \varphi)(a) = \psi(\varphi(a)) = \psi(c) = e$, $(\psi \circ \varphi)(b) = \psi(\varphi(b)) = \psi(d) = f$ și astfel ca $F_1(t) = F_2(\varphi(t)) = F_3(\psi(\varphi(t))) = F_3(\psi \circ \varphi(t))$, pentru orice $t \in [a, b]$ adică $F_1 \sim F_3$.

Observația 8.1.2 *Relația de echivalență împarte mulțimea tuturor drumurilor în clase de echivalență disjuncte. Deci două drumuri sunt echivalente dacă și numai dacă aparțin aceleiași clase.*

Definiția 8.1.8 *Se numește curbă o clasă de drumuri echivalente.*

Imaginea curbei este imaginea unui drum conținut de curbă. Curba închisă este curba care conține cel puțin un drum închis (orice drum echivalent cu un drum închis este, de asemenea, închis). Curbă rectificabilă este curba care conține cel puțin un drum rectificabil. Lungimea unei curbe rectificabile este lungimea comună a drumurilor ce alcătuiesc această curbă. Curba netedă este curba ce conține cel puțin un drum neted. Curbe juxtapozabile sunt două curbe C_1 și C_2 pentru care există un drum $d_1 \in C_1$ și un drum $d_2 \in C_2$ astfel ca d_1 și d_2 să fie juxtapozabile. Clasa de echivalență a drumului $d = d_1 \cup d_2$ se numește juxtapunerea curbelor C_1 și C_2 și se notează $C = C_1 \cup C_2$. O curbă C se numește netedă pe porțiuni dacă este juxtapunerea unui număr finit de curbe netede $C_i, i = \overline{1, n}$, adică dacă $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$. Orice curbă netedă pe porțiuni este rectificabilă. Dacă $l(C)$ este lungimea unei curbe rectificabile, atunci pentru o curbă netedă pe porțiuni avem $l(C) = \sum_{i=1}^n l(C_i)$.

În cele ce urmează vom nota prin reprezentări parametrice de tipul (8.1), atât drumurile cât și curbele, fără a exista nici un pericol de confuzie după cele prezentate anterior.

Observația 8.1.3 1. Toate noțiunile și proprietățile expuse, care s-au referit la drumuri și curbe în spațiu, se transpun fără nici o problemă la drumuri și curbe în plan. De exemplu, lungimea unui drum neted în plan este $l(d) = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)} dt$.

2. Fie $d : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un drum definit de:

$$d : \begin{cases} x = \varphi(t) \cos t \\ y = \varphi(t) \sin t \end{cases}, \quad t \in [a, b], \quad (8.6)$$

unde t se numește unghi polar, iar φ este o funcție continuă $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă φ este o funcție de clasă $C^1[a, b]$, atunci drumul (8.6) este rectificabil și lungimea lui este

$$l(d) = \int_a^b \sqrt{\varphi^2(t) + \varphi'^2(t)} dt \quad (8.7)$$

Într-adevăr, avem $x = f(t), y = g(t)$, unde $f(t) = \varphi(t) \cos t, g(t) = \varphi(t) \sin t$, pentru orice $t \in [a, b]$, $f, g \in C^1[a, b]$. Conform teoremei 8.1.2 drumul (8.6) este rectificabil și

$$l(d) = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)} dt. \quad (8.8)$$

Însă, $f'(t) = \varphi'(t) \cos t - \varphi(t) \sin t$ și $g'(t) = \varphi'(t) \sin t + \varphi(t) \cos t$,

$$\begin{aligned} f'^2(t) + g'^2(t) &= \varphi'^2(t) \cos^2 t - 2\varphi(t)\varphi'(t) \cos t \sin t + \varphi^2(t) \sin^2 t + \\ &+ \varphi'^2(t) \sin^2 t + 2\varphi(t)\varphi'(t) \cos t \sin t + \varphi^2(t) \cos^2 t = \varphi'^2(t) + \varphi^2(t) \end{aligned}$$

și înlocuind în (8.8) se obține relația (8.7).

Exemplu 8.1.2 1. Să se calculeze lungimea curbei plane C definită prin reprezentarea parametrică $C : \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi], a > 0$. Avem $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \sin t$,

$$\begin{aligned} l(C) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a. \end{aligned}$$

2. Să se calculeze lungimea curbei C (elicea circulară) definită prin reprezentarea parametrică

$$C : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi], a, b > 0.$$

$$l(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Integrale curbilinii

Integrala curbilinie este o extindere a integralei definite, unde intervalul de integrare $[a, b]$ se înlocuiește cu un arc de curbă.

Problemele care conduc la introducerea integralelor curbilinii provin din fizică: problema determinării masei unui fir material, problema determinării sarcinii electrice totale a unui fir material atunci când se cunoaște densitatea de repartitie în fiecare punct al firului, problema lucrului mecanic efectuat de o forță de-a lungul unui arc de curbă, etc.

8.2 Integrala curbilinie în raport cu lungimea arcului

Considerăm un fir material având grosimea neglijată. Întrucât firul material are lungime vom presupune că el este imaginea unei curbe rectificabile C , dată de ecuațiile parametrice:

$$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b], \quad f, g, h \in C^0[a, b] \quad (8.9)$$

Pe firul material presupunem distribuită o masă de densitate $\rho(x, y, z)$, pentru orice $(x, y, z) \in I(C)$. Problema determinării masei unui fir material conduce la noțiunea de integrală curbilinie în raport cu lungimea arcului (sau de speța întâi).

Pentru fiecare $t \in [a, b]$ notăm C_t curba rectificabilă dată de reprezentarea parametrică

$$C_t : \begin{cases} x = f(t') \\ y = g(t') \\ z = h(t') \end{cases}, \quad t' \in [a, t]$$

și cu $l(t)$ lungimea acestei curbe, care este o funcție strict crescătoare pe intervalul $[a, b]$.

Fie $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Masa firului material poate fi aproximată prin suma $\sum_{i=0}^{n-1} \rho(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))(l_{t_{i+1}} - l_{t_i})$, unde $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$.

Definiția 8.2.1 Fie $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție reală, unde $D \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu (mulțime deschisă și conexă) ce conține imaginea curbei rectificabile C dată de (8.9). Dacă integrala Stieltjes

$$\int_a^b F(f(t), g(t), h(t)) dl(t) \quad (8.10)$$

există, atunci ea se notează $\int_C F(x, y, z) dl$ și se numește integrala curbilinie a funcției F de-a lungul curbei C , iar funcția F se spune că este integrabilă în raport cu lungimea l , de-a lungul curbei C .

Observația 8.2.1 Fie $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ și $\Delta' : M_0(f(t_0), g(t_0), h(t_0)), M_1(f(t_1), g(t_1), h(t_1)), \dots, M_n(f(t_n), g(t_n), h(t_n))$ o diviziune a curbei C corespunzătoare diviziunii Δ , cu $\nu(\Delta') = \max_{i=\overline{0, n-1}} l(\widehat{M_i M_{i+1}})$ norma diviziunii Δ' , iar $N_i(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i)) \in \widehat{M_i M_{i+1}}$, $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$ puncte situate pe arcul $\widehat{M_i M_{i+1}}$. Considerăm suma $\sigma_{\Delta', F} = \sum_{i=0}^{n-1} F(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i)) l(\widehat{M_i M_{i+1}})$.

Funcția F este integrabilă în raport cu lungimea l , de-a lungul curbei C , dacă pentru orice șir de diviziuni (Δ'_n) ale curbei C cu norma $\nu(\Delta'_n) \rightarrow 0$, șirul corespunzător $(\sigma_{\Delta'_n, F})$ are limită finită, care este $\int_C F(x, y, z) dl$.

Teorema 8.2.1 Existența și valoarea integralei curbilinii (8.10) nu depind de alegerea drumului ei ci doar de curba C .

DEMONSTRAȚIE. Fie d_1, d_2 două drumuri rectificabile, $d_1 \sim d_2$, având reprezentările parametrice:

$$d_1 : \begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \\ z = h_1(t) \end{cases}, \quad t \in [a_1, b_1], \quad d_2 : \begin{cases} x = f_2(t) \\ y = g_2(t) \\ z = h_2(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b],$$

$f_1, g_1, h_1 \in C^0[a_1, b_1]$, $f_2, g_2, h_2 \in C^0[a_2, b_2]$ și presupunem că există integrala curbilinie $\int_{a_1}^{b_1} F(f_1(t), g_1(t), h_1(t)) dl_1(t)$.

Considerăm $\Delta : a_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b_1$ o diviziune a intervalului $[a_1, b_1]$. Deoarece $d_1 \sim d_2$, rezultă că există o funcție continuă, strict crescătoare $\varphi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ astfel ca $\varphi(a_1) = a_2$, $\varphi(b_1) = b_2$ și $f_1(t) = f_2(\varphi(t))$, $g_1(t) = g_2(\varphi(t))$, $h_1(t) = h_2(\varphi(t))$, pentru orice $t \in [a_1, b_1]$ și $\Delta' : a_2 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = b_2$, unde $\tau_i = \varphi(t_i)$, $i = \overline{0, n}$ este o diviziune a intervalului $[a_2, b_2]$.

Fie $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$, pentru orice $i = \overline{0, n-1}$. Atunci există punctele $\eta_i = \varphi(\xi_i) \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$. Din echivalența drumurilor d_1 și d_2 avem $l_1(t) = l_2(\tau)$. Atunci

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta, F} &= \sum_{i=0}^{n-1} F(f_1(\xi_i), g_1(\xi_i), h_1(\xi_i))(l_1(t_{i+1}) - l_1(t_i)) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} F(f_2(\eta_i), g_2(\eta_i), h_2(\eta_i))(l_2(\tau_{i+1}) - l_2(\tau_i)) = \sigma_{\Delta', F} \end{aligned} \quad (8.11)$$

Așadar, pentru orice șir de diviziuni (Δ_n) ale intervalului $[a_1, b_1]$ cu norma $\nu(\Delta_n) \rightarrow 0$, șirul corespunzător prin funcția uniform continuă φ , (Δ'_n) , de diviziuni ale intervalului $[a_2, b_2]$ are norma $\nu(\Delta'_n) \rightarrow 0$, iar șirul corespunzător $(\sigma_{\Delta'_n, F})$ are limită finită, conform relației (8.11) și observației 8.2.1, deci există integrala curbilinie $\int_{a_2}^{b_2} F(f_2(\tau), g_2(\tau), h_2(\tau)) dl_2(\tau)$ și în plus,

$$\int_{a_1}^{b_1} F(f_1(t), g_1(t), h_1(t)) dl_1(t) = \int_{a_2}^{b_2} F(f_2(\tau), g_2(\tau), h_2(\tau)) dl_2(\tau).$$

8.3 Calculul integralei curbilinii în raport cu lungimea arcului

Teorema 8.3.1 *Dacă curba C dată de reprezentarea parametrică (8.9) este netedă, iar funcția $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă, unde $D \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu ce conține imaginea curbei C , atunci:*

$$\int_C F(x, y, z) dl = \int_a^b F(f(t), g(t), h(t)) \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)} dt$$

DEMONSTRAȚIE. Conform teoremei (8.1.2), pentru orice $t \in [a, b]$ $l(t) = \int_a^t \sqrt{f'^2(u) + g'^2(u) + h'^2(u)} du$. Este suficient să arătăm că $l(t)$ este cu derivata continuă pe $[a, b]$ pentru a putea aplica teorema de reducere a unei integrale Stieltjes la o integrală Riemann (vezi [10], vol. II, pag. 24). Întrucât funcția $\sqrt{f'^2(u) + g'^2(u) + h'^2(u)}$ este continuă pe $[a, b]$, rezultă că l este derivabilă și $l'(t) = \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}$. Atunci

$$\begin{aligned} \int_C F(x, y, z) dl &= \int_a^b F(f(t), g(t), h(t)) l'(t) dt = \\ &= \int_a^b F(f(t), g(t), h(t)) \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)} dt \end{aligned}$$

Observația 8.3.1 1. În condițiile teoremei 8.3.1 forma diferențială

$$dl = \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)} dt$$

se numește element de arc.

2. Fie C o curbă rectificabilă în plan având reprezentarea parametrică

$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$. Similar se definește integrala curbilinie a unei funcții F definită pe un domeniu D din plan ce conține imaginea curbei C . Dacă, în plus, curba C este netedă, iar funcția F este continuă pe domeniul D , atunci

$$\int_C F(x, y) dl = \int_a^b F(f(t), g(t)) \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)} dt$$

3. Dacă curba C din plan este dată sub forma $y = f(x), x \in [a, b], f \in C^1[a, b]$, atunci elementul de arc se scrie sub forma $dl = \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$.

Exemplu 8.3.1 1. Să se calculeze integrala curbilinie $I = \int_C xy dl$, unde

$C : y = x^2, x \in [-1, 1]$. $dl = \sqrt{1 + 4x^2} dx \Rightarrow I = \int_{-1}^1 x^3 \sqrt{1 + 4x^2} dx = 0$, deoarece funcția $x^3 \sqrt{1 + 4x^2}$ este impară.

2. Să se calculeze integrala curbilinie $I = \int_C \sqrt{y(2-y)} dl$, unde

$$C : \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)} dt = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \sqrt{2 - 2 \cos t} dt; \\ I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - \cos t)(1 + \cos t)} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{1 - \cos t} dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} dt = \frac{8}{3} \sin^3 \frac{t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

3. Să se calculeze integrala curbilinie $I = \int_C xyz dl$, unde $C : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases},$

$$t \in [0, 2\pi]; \quad dl = \sqrt{a^2 + b^2} dt,$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} a^2 b t \sin t \cos t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \frac{1}{2} a^2 b \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} t \sin 2t dt = \\ &= -\frac{1}{4} a^2 b \sqrt{a^2 + b^2} t \cos 2t \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} a^2 b \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} \cos 2t dt = -\frac{\pi}{2} a^2 b \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Observația 8.3.2 Dacă curba C din spațiu este netedă pe porțiuni, adică $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$ și funcția F este integrabilă în raport cu lungimea fiecărei curbe C_i , atunci

$$\int_C F(x, y, z) dl = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} F(x, y, z) dl.$$

Exemplu 8.3.2 Să se calculeze integrala $I = \int_C (x + y + z) dl$, unde $C = C_1 \cup C_2$, iar curbele C_1 și C_2 sunt definite de reprezentările:

$$C_1 : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$C_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = a - t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in [0, a].$$

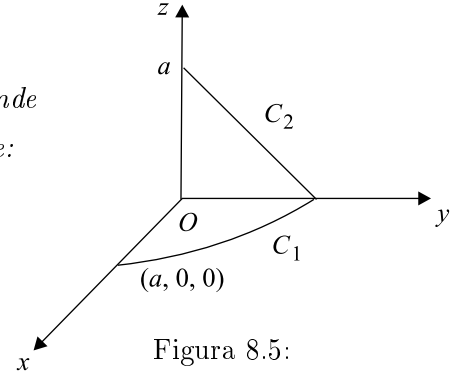


Figura 8.5:

Atunci

$$\begin{aligned} I &= \int_{C_1} (x + y + z) dl + \int_{C_2} (x + y + z) dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 (\cos t + \sin t) dt + \int_0^a a\sqrt{2} dt \\ &= 2a^2 + a^2\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})a^2 \end{aligned}$$

8.4 Integrala curbilinie în raport cu coordonatele

Extindem conceptul de integrală Riemann a unei funcții mărginite definite pe un interval $[a, b]$ la funcții vectoriale definite pe lungimea unei curbe.

După cum se știe din fizică, lucrul mecanic efectuat de o forță constantă \vec{F} ce se deplasează rectiliniu pe un segment \overline{AB} este produsul scalar $L = (\vec{F}, \overline{AB}) = \|\vec{F}\| \|\overline{AB}\| \cos \theta$, unde θ este unghiul pe care-l face forța \vec{F} cu direcția \overline{AB} . Dacă forța \vec{F} este de componente P, Q și R , $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, iar punctele A și B de coordonate $A(x_1, y_1, z_1)$, respectiv $B(x_2, y_2, z_2)$, atunci $L = P(x_2 - x_1) + Q(y_2 - y_1) + R(z_2 - z_1)$. Considerăm o curbă rectificabilă și netedă dată de reprezentarea parametrică

$$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b] \quad f, g, h \in C^1[a, b] \quad (8.12)$$

și $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ $F = (P, Q, R)$ o funcție vectorială definită pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$ ce conține imaginea curbei C . Ne propunem să calculăm lucrul mecanic efectuat de forța F de-a lungul curbei $C = \widehat{AB}$, unde $A(f(a), g(a), h(a))$, respectiv $B(f(b), g(b), h(b))$. Fie $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ căreia îi corespunde o diviziune $\Delta' : A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$ a curbei \widehat{AB} , unde $M_i(f(t_i), g(t_i), h(t_i))$, $i = \overline{0, n}$. Are loc și reciproca, dacă $\Delta' : A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$ este o diviziune a curbei \widehat{AB} , unde $M_i(f(t_i), g(t_i), h(t_i))$, $i = \overline{0, n}$, atunci $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ este o diviziune a intervalului $[a, b]$.

8.5. Calculul integralei curbilinii în raport cu coordonatele

Alegem punctele intermediare $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$ ale diviziunii Δ , cărora le corespund punctele $N_i(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i)) \in \widehat{M_i M_{i+1}}$, $i = \overline{0, n-1}$.

Lucrul mecanic efectuat de forța \bar{F} de-a lungul curbei C îl vom aproxima cu suma

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} (\bar{F}(N_i), \overline{M_i M_{i+1}}),$$

adică cu suma lucrurilor mecanice efectuate de forțele constante $\bar{F}(N_i)$ pe segmenetele $\overline{M_i M_{i+1}}$, $i = \overline{0, n-1}$. Atunci

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{i=0}^{n-1} P(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))(f(t_{i+1}) - f(t_i)) + Q(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))(g(t_{i+1}) - \\ &- g(t_i)) + R(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))(h(t_{i+1}) - h(t_i)). \end{aligned}$$

Definiția 8.4.1 Dacă pentru orice șir de diviziuni ale curbei C , (Δ'_n) , cu norma $\nu(\Delta'_n) \rightarrow 0$ și pentru orice alegere a punctelor intermediare $\xi_i^n \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$ ale diviziunilor (Δ_n) ce corespund diviziunilor (Δ'_n) suma

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n_1} P(f(\xi_i^n), g(\xi_i^n), h(\xi_i^n))(f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n)) + R(f(\xi_i^n), g(\xi_i^n), h(\xi_i^n))(g(t_{i+1}^n) - \\ &- g(t_i^n)) + R(f(\xi_i^n), g(\xi_i^n), h(\xi_i^n))(h(t_{i+1}^n) - h(t_i^n)) \end{aligned} \quad (8.13)$$

are limită finită, atunci această limită se numește integrala curbilinie a funcției F în raport cu coordonatele sau integrala curbilinie de speța a doua. Limita sumei (8.13) se notează

$$\int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \quad (8.14)$$

Observația 8.4.1

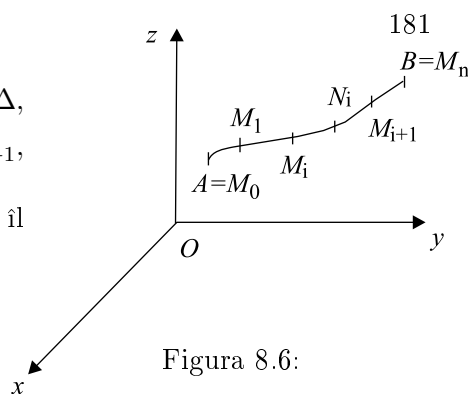
$$\begin{aligned} 1. \quad &\int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_a^b P(f(t), g(t), h(t))df(t) + \\ &+ \int_a^b Q(f(t), g(t), h(t))dg(t) + \int_a^b R(f(t), g(t), h(t))dh(t) \end{aligned}$$

2. Integrala curbilinie în raport cu coordonatele în plan se definește în mod similar.

8.5 Calculul integralei curbilinii în raport cu coordonatele

Teorema 8.5.1 Fie $C = \widehat{AB}$ o curbă netedă în spațiu dată de (8.12) și $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F = (P, Q, R)$ o funcție vectorială definită și continuă pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$ ce conține imaginea curbei \widehat{AB} . Atunci

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz &= \int_a^b [P(f(t), g(t), h(t))f'(t) + \\ &+ Q(f(t), g(t), h(t))g'(t) + R(f(t), g(t), h(t))h'(t)]dt. \end{aligned}$$



DEMONSTRAȚIE. Fie $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$, căreia îi corespunde diviziunea $\Delta' : A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$ a curbei \widehat{AB} , $M_i(f(t_i), g(t_i), h(t_i))$, $i = \overline{0, n}$ și punctele $N_i \in \widehat{M_i M_{i+1}}$, $N_i(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))$, unde $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$ și considerăm suma

$$\sum_{i=0}^{n-1} P(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))(f(t_{i+1}) - f(t_i)). \quad (8.15)$$

Curba \widehat{AB} fiind netedă, funcțiile $f, g, h \in C^1[a, b]$. Avem, conform teoremei creșterilor finite a lui Lagrange,

$$f(t_{i+1}) - f(t_i) = f'(\tau_i)(t_{i+1} - t_i), \quad \tau_i \in (t_i, t_{i+1}), \quad i = \overline{0, n}.$$

Suma (8.15) devine astfel

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-1} P(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))f'(\tau_i)(t_{i+1} - t_i) = \\ & = \sum_{i=0}^{n-1} P(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))f'(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) + \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} P(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))(f'(\tau_i) - f'(\xi_i))(t_{i+1} - t_i). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Deoarece $f \in C^1[a, b] \Rightarrow f' \in C^0[a, b] \Rightarrow f'$ este uniform continuă pe $[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca pentru orice $\xi_i, \tau_i \in [a, b]$ cu $|\xi_i - \tau_i| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(\xi_i) - f(\tau_i)| < \varepsilon$.

Funcția $P \in C^0(\widehat{AB}) \Rightarrow P$ este mărginită pe $\widehat{AB} \Rightarrow \exists m > 0$ astfel ca $|P(x, y, z)| \leq m$, pentru orice $(x, y, z) \in \widehat{AB}$.

Alegem diviziunea Δ a intervalului $[a, b]$ așa încât $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$. Atunci

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} P(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))(f'(\tau_i) - f'(\xi_i))(t_{i+1} - t_i) \right| < m\varepsilon(b - a).$$

Dacă pentru orice șir de diviziuni (Δ_n) ale intervalului $[a, b]$ cu $\nu(\Delta_n) \rightarrow 0$ și pentru orice alegere a punctelor intermediare $\xi_i^n \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$ trecem la limită în (8.16) obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} P(f(\xi_i^n), g(\xi_i^n), h(\xi_i^n))(f(t_{i+1}) - f(t_i)) = \int_a^b P(f(t), g(t), h(t))f'(t)dt.$$

Analog se obțin și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} Q(f(\xi_i^n), g(\xi_i^n), h(\xi_i^n))(g(t_{i+1}) - g(t_i)) = \int_a^b Q(f(t), g(t), h(t))g'(t)dt$$

și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} R(f(\xi_i^n), g(\xi_i^n), h(\xi_i^n))(h(t_{i+1}) - h(t_i)) = \int_a^b R(f(t), g(t), h(t))h'(t)dt.$$

Observația 8.5.1 1. Dacă C este o curbă netedă în plan dată de reprezentarea C :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b], \quad f, g \in C^1[a, b], \text{ atunci}$$

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b [P(f(t), g(t))f'(t) + Q(f(t), g(t))g'(t)]dt.$$

2. Dacă $\bar{F}(x, y, z) = \bar{i}P(x, y, z) + \bar{j}Q(x, y, z) + \bar{k}R(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \widehat{AB}$ iar $\bar{r}(t) = \bar{i}f(t) + \bar{j}g(t) + \bar{k}h(t)$, $t \in [a, b]$, atunci

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{AB} \bar{F} \cdot d\bar{r},$$

unde $\bar{F} \cdot d\bar{r}$ reprezintă produsul scalar între vectorul forță \bar{F} și vectorul deplasare $d\bar{r}$.

3. Dacă curba $\widehat{AB} = C$ este închisă, atunci integrala (8.14) se notează

$$\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{r}.$$

Teorema 8.5.2 Valoarea integralei curbilinii (8.14) nu depinde de reprezentarea parametrică a curbei \widehat{AB} .

DEMONSTRAȚIE. Fie $d, d_1 \in \widehat{AB}$ definite de $d : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$ și $d_1 :$

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \\ z = h_1(t) \end{cases}, \quad t \in [c, e], \quad f, g, h \in C^1[a, b], f_1, g_1, h_1 \in C^1[c, e].$$

Întrucât $d \sim d_1$, rezultă că există o funcție continuă, strict crescătoare $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, e]$ astfel ca $\varphi(a) = c, \varphi(b) = e$ și $f(t) = f_1(\varphi(t)), g(t) = g_1(\varphi(t)), h(t) = h_1(\varphi(t)), t \in [a, b]$. Conform teoremei 8.5.1, față de drumul d avem

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx = \int_a^b P(f(t), g(t), h(t))f'(t)dt, \quad (8.17)$$

iar față de drumul d_1 avem

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx = \int_c^e P(f_1(t), g_1(t), h_1(t))f_1'(t)dt. \quad (8.18)$$

Dacă în (8.18) facem schimbarea de variabilă $t = \varphi(u), u \in [a, b]$ se obține

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z)dx &= \int_a^b P(f_1(\varphi(u)), g_1(\varphi(u)), h_1(\varphi(u)))f_1'(\varphi(u))\varphi'(u)du = \\ &= \int_a^b P(f(u), g(u), h(u))f'(u)du. \end{aligned}$$

Observația 8.5.2 Dacă curba $C = \widehat{AB}$ este netedă pe porțiuni și $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$, atunci

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz &= \sum_{i=1}^n \int_{C_i} P(x, y, z)dx + \\ &+ Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \end{aligned}$$

Exemplu 8.5.1 1. Să se calculeze integrala curbilinie $I = \int_C (2a - y)dx + xdy$, curba C fiind

$$\text{dată de reprezentarea } C : \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

$$I = a^2 \int_0^{2\pi} [(1 + \cos t)(1 - \cos t) + (t - \sin t) \sin t] dt = a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = -2\pi a^2.$$

2. Să se calculeze integrala curbilinie $I = \int_C xdx + ydy + zdz$, curba C fiind dată de

$$\text{reprezentarea } C : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \\ z = ct \end{cases}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-a^2 \cos t \sin t + b^2 \sin t \cos t + c^2 t) dt = -\frac{a^2 - b^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt + \\ &+ \frac{c^2 \pi^2}{8} = \frac{a^2 - b^2}{4} \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{c^2 \pi^2}{8} = \frac{1}{8}(4b^2 - 4a^2 + c^2 \pi^2). \end{aligned}$$

8.6 Proprietățile integralei curbilinii

Dacă ținem seama de teorema 8.5.1 și de proprietățile integralei Riemann, rezultă imediat următoarele proprietăți ale integralei curbilinii în raport cu coordonatele.

1. Dacă funcția vectorială \bar{F} este integrabilă pe curba \widehat{AB} , atunci

$$\int_{AB} \bar{F} \cdot d\bar{r} = - \int_{BA} \bar{F} \cdot d\bar{r}.$$

2. Dacă funcțiile vectoriale \bar{F}_1 și \bar{F}_2 sunt integrabile pe curba \widehat{AB} , atunci și funcția $\bar{F}_1 + \bar{F}_2$ este integrabilă pe curba \widehat{AB} și

$$\int_{AB} (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) \cdot d\bar{r} = \int_{AB} \bar{F}_1 \cdot d\bar{r} + \int_{AB} \bar{F}_2 \cdot d\bar{r}.$$

3. Dacă funcția vectorială \bar{F} este integrabilă pe curba \widehat{AB} , atunci și funcția $\lambda \bar{F}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, este integrabilă pe curba \widehat{AB} și

$$\int_{AB} \lambda \bar{F} \cdot d\bar{r} = \lambda \int_{AB} \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

8.7 Independența de drum a integralei curbilinii în raport cu coordonatele

După cum s-a putut constata integrala curbilinie (8.14) depinde de funcțiile P, Q, R de curba netedă C și de sensul parcurs pe această curbă. Problema independenței de drum este o problemă importantă atât în fizică (de exemplu lucrul mecanic al forței gravitaționale nu depinde de drum) cât și în matematică, deoarece este mai ușor de calculat atunci când se cunosc numai extremitățile curbei C .

Teorema 8.7.1 Fie funcțiile P, Q și R definite și continue pe un domeniu D din spațiu. Condiția necesară și suficientă pentru ca integrala curbilinie (8.14) să nu depindă de drum în D este ca să existe o funcție F definită și diferențiabilă în D , astfel încât să avem

$$dF(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz, \quad (x, y, z) \in D \quad (8.19)$$

DEMONSTRAȚIE. \Rightarrow Presupunem că integrala curbilinie (8.14) nu depinde de drum. Fie $A(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat în D și $B(x, y, z)$ un punct variabil în D . Conform ipotezei integrala curbilinie calculată de la A la B depinde doar de P, Q, R și coordonatele lui B , adică există o funcție F definită în D așa încât

$$F(x, y, z) = \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Considerăm în D punctul $M(x+h, y, z)$ și calculăm diferența

$$\begin{aligned} F(x+h, y, z) - F(x, y, z) &= \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz - \\ &- \int_{AM} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{BM} P(x, y, z)dx + \\ &+ Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_x^{x+h} P(x, y, z)dx, \quad (dy = dz = 0). \end{aligned}$$

Deoarece P este continuă în D , conform teoremei de medie de la integrala Riemann, există $\theta \in (0, 1)$ astfel ca $F(x+h, y, z) - F(x, y, z) = hP(x+\theta h, y, z)$. Atunci

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h, y, z) - F(x, y, z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} P(x+\theta h, y, z) = P(x, y, z),$$

adică $F'_x(x, y, z) = P(x, y, z), (x, y, z) \in D$. Analog se obține $F'_y(x, y, z) = Q(x, y, z)$ și $F'_z(x, y, z) = R(x, y, z), (x, y, z) \in D$. Astfel $F \in C^1(D)$, deci F este diferențiabilă și

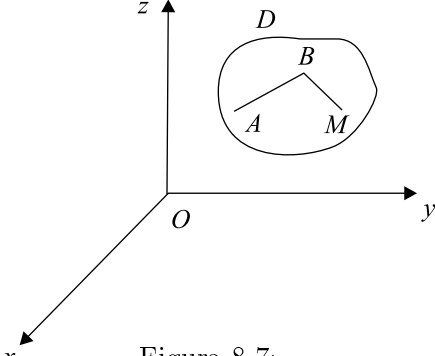
$$dF(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz, \quad (x, y, z) \in D.$$

\Leftarrow Presupunem că există funcția diferențiabilă F în D astfel încât să se verifice relația (8.19). Atunci $F'_x(x, y, z) = P(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z) = Q(x, y, z)$ și $F'_z(x, y, z) = R(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D$.

Fie curba C dată de parametrizarea $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, t \in [a, b], f, g, h \in C[a, b]$, iar $A(f(t_0), g(t_0), h(t_0)), B(f(t_1), g(t_1), h(t_1)) \in C, t_0, t_1 \in [a, b]$. Atunci

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz &= \\ &= \int_{AB} F'_x(x, y, z)dx + F'_y(x, y, z)dy + F'_z(x, y, z)dz = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [F'_x(f(t), g(t), h(t))f'(t) + F'_y(f(t), g(t), h(t))g'(t) + \\ &+ F'_z(f(t), g(t), h(t))h'(t)]dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dF}{dt}(f(t), g(t), h(t))dt = \\ &= F(f(t_1), g(t_1), h(t_1)) - F(f(t_0), g(t_0), h(t_0)) = F(B) - F(A), \end{aligned}$$

Figura 8.7:



adică integrala curbilinie (8.14) nu depinde decât de A și B .

Teorema 8.7.2 *Fie funcțiile P, Q și R definite pe un domeniu D din spațiu, pentru care există și sunt continue în D derivatele parțiale $P'_y, P'_z, Q'_x, Q'_z, R'_x, R'_y$. Condiția necesară și suficientă pentru ca integrala curbilinie (8.14) să nu depindă de drum în D este ca*

$$P'_y = Q'_x, \quad P'_z = R'_x, \quad Q'_z = R'_y \quad (8.20)$$

DEMONSTRAȚIE. \Rightarrow Presupunem că integrala (8.14) nu depinde de drum. Atunci, conform teoremei 8.7.1, există o funcție F diferențiabilă în D astfel ca $F'_x(x, y, z) = P(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z) = Q(x, y, z)$ și $F'_z(x, y, z) = R(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D$. Conform ipotezei, există derivatele parțiale de ordinul al doilea mixte ale funcției F continue în D , $F''_{xy} = P'_y, F''_{yx} = Q'_x, F''_{xz} = P'_z, F''_{zx} = R'_x, F''_{yz} = Q'_z$ și $F''_{zy} = R'_y$. Aplicând comutativitatea derivatelor parțiale mixte (teorema lui Schwarz) rezultă relațiile (8.20).

\Leftarrow Fie funcția F definită în D dată de relația

$$F(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t) dt, \quad (8.21)$$

unde (x_0, y_0, z_0) este un punct fixat din D , iar $(x, y, z) \in D$.

Deoarece P, Q și R sunt funcții continue și cu derivate parțiale continue în D , din (8.20) avem

$$\begin{aligned} F'_x(x, y, z) &= P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^y Q'_x(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z R'_x(x, y, t) dt = \\ &= P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^y P'_y(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z P'_z(x, y, t) dt = P(x, y_0, z_0) + \\ &\quad + P(x, y, z_0) - P(x, y_0, z_0) + P(x, y, z) - P(x, y, z_0) = P(x, y, z). \end{aligned}$$

Derivând (8.21) în raport cu y se obține:

$$\begin{aligned} F'_y(x, y, z) &= Q(x, y, z_0) + \int_{z_0}^z R'_y(x, y, t) dt = Q(x, y, z_0) + \int_{z_0}^z Q'_z(x, y, t) dt = \\ &= Q(x, y, z_0) + Q(x, y, z) - Q(x, y, z_0) = Q(x, y, z), \end{aligned}$$

și derivând (8.21) în raport cu z rezultă $F'_z(x, y, z) = R(x, y, z)$.

În calculele de mai sus am aplicat formula Leibniz-Newton, și teorema de derivare a unei integrale în raport cu un parametru.

Deoarece $P, Q, R \in C^0(D) \Rightarrow F \in C^1(D) \Rightarrow F$ diferențiabilă pe D și

$$dF(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

care, conform teoremei 8.7.1, ne dă independența de drum a integralei (8.14).

Pentru integrale curbilinii (8.14) în plan care nu depind de drum se obțin rezultate asemănătoare.

Teorema 8.7.3 *Fie funcțiile P și Q definite și continue pe un domeniu plan D . Condiția necesară și suficientă pentru ca integrala curbilinie de speța a doua să nu depindă de drum în D este ca să existe o funcție F definită și diferențiabilă în D , astfel încât să avem*

$$dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (x, y) \in D.$$

Teorema 8.7.4 Fie funcțiile P și Q definite și continue pe un domeniu plan D pentru care există și sunt continue în D derivatele parțiale P'_y și Q'_x . Condiția necesară și suficientă pentru ca integrala curbilinie de speța a doua să nu depindă de drum în D este ca

$$P'_y = Q'_x \quad (8.22)$$

În plus, funcția F din teorema 8.7.3 este dată de următoarea relație

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt, \quad (8.23)$$

unde (x_0, y_0) este un punct fix din D , iar $(x, y) \in D$.

Exemplu 8.7.1 1. Să se arate că integrala $I = \int_{AB} y^2 e^x dx + 2ye^x dy$ este independentă de drum și să se calculeze dacă $A(0, 2)$ și $B(2, 0)$.

$$P(x, y) = y^2 e^x, \quad Q(x, y) = 2ye^x \quad i \quad P'_y = Q'_x = 2ye^x,$$

deci este verificată condiția (8.22). Conform relației (8.23), rezultă

$$I = F(2, 0) = \int_0^2 4e^t dt + \int_2^0 2e^2 t dt = 4e^t \Big|_0^2 + e^2 t^2 \Big|_0^2 = -4.$$

2. Să se arate că integrala $I = \int_{AB} \frac{y}{z} dx + \frac{x}{z} dy - \frac{xy}{z^2} dz$, luată pe o curbă ce nu intersectează planul $z = 0$ este independentă de drum și să se calculeze dacă $A(-1, 3, 1)$ și $B(2, 6, 3)$.

$$P(x, y, z) = \frac{y}{z}, \quad Q(x, y, z) = \frac{x}{z}, \quad R(x, y, z) = -\frac{xy}{z^2} \quad i$$

$$P'_y = Q'_x = \frac{1}{z}, \quad P'_z = R'_x = -\frac{y}{z^2}, \quad Q'_z = R'_y = -\frac{x}{z^2},$$

deci este verificată condiția (8.20). Conform relației (8.21), rezultă

$$I = F(2, 6, 3) = \int_{-1}^2 3dt + \int_3^6 2dt - \int_1^3 \frac{18}{t^2} dt = 15 + 18 \frac{1}{t} \Big|_1^3 = 3.$$

8.8 Aplicații ale integralelor curbilinii

1. Masa și centrul de greutate ale unui fir material.

Revenim la problema determinării masei unui fir material. Dacă $\rho(x, y, z)$ este densitatea distribuită în fiecare punct al curbei rectificabile C , $(x, y, z) \in I(C)$, atunci masa M și coordonatele centrului de greutate (x_G, y_G, z_G) ale firului sunt date de următoarele relații:

$$M = \int_C \rho(x, y, z) dl, \quad x_G = \frac{1}{M} \int_C x \rho(x, y, z) dl,$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int_C y \rho(x, y, z) dl, \quad z_G = \frac{1}{M} \int_C z \rho(x, y, z) dl.$$

Fie curba $C = \widehat{AB}$ și $\Delta : A = N_0, N_1, \dots, N_n = B$ o diviziune a curbei, $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ centrul de greutate al segmentului $N_i N_{i+1}$ de masă $m_i = \rho_i N_i N_{i+1}$, unde ρ_i este densitatea pe $N_i N_{i+1}$, $i = \overline{0, n-1}$.

Centrul de greutate al firului îl vom aproxima cu centrul de greutate al liniei poligonale N_0, N_1, \dots, N_n și care este dat de relațiile

$$\begin{aligned} x_{G_n} &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \rho_i l_i \right) / \left(\sum_{i=0}^{n-1} \rho_i l_i \right) \\ y_{G_n} &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \rho_i l_i \right) / \left(\sum_{i=0}^{n-1} \rho_i l_i \right) \\ z_{G_n} &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \zeta_i \rho_i l_i \right) / \left(\sum_{i=0}^{n-1} \rho_i l_i \right). \end{aligned}$$

Pentru orice șir de diviziuni (Δ_n) ale curbei \widehat{AB} cu $\nu(\Delta_n) \rightarrow 0$ avem

$$\begin{aligned} x_G &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{G_n} = \frac{1}{M} \int_C x \rho(x, y, z) dl \\ y_G &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_{G_n} = \frac{1}{M} \int_C y \rho(x, y, z) dl \\ z_G &= \lim_{n \rightarrow \infty} z_{G_n} = \frac{1}{M} \int_C z \rho(x, y, z) dl. \end{aligned}$$

Dacă firul material este omogen, atunci densitatea $\rho(x, y, z) = \rho$ este constantă pentru orice $(x, y, z) \in I(C)$, iar masa și coordonatele centrului de greutate ale firului sunt date de următoarele relații:

$$M = \rho l(C), \quad x_G = \frac{1}{l(C)} \int_C x dl, \quad y_G = \frac{1}{l(C)} \int_C y dl, \quad z_G = \frac{1}{l(C)} \int_C z dl.$$

Exemplu 8.8.1 Să se calculeze masa și coordonatele centrului de greutate G al firului material având densitatea $\rho(x, y, z) = 1$ și reprezentarea $C : x = (\pi^2 - t^2)^{1/2} \cos t$, $y = (\pi^2 - t^2)^{1/2} \sin t$, $z = (4\pi^2 - 1)^{1/2}(\pi^2 - t^2)^{1/2}$, $t \in [-\pi, \pi]$. Deoarece $dl = (\pi^2 + t^2)(\pi^2 - t^2)^{-1/2} dt$ obținem

$$M = \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 + t^2)(\pi^2 - t^2)^{-1/2} dt = \pi^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos^2 u) du = \frac{3\pi^3}{2},$$

unde $t = \pi \cos u$.

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{2}{3\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 + t^2) \cos t dt = -\frac{8}{3\pi^2}, \\ y_G &= \frac{2}{3\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 + t^2) \sin t dt = 0, \\ z_G &= \frac{2}{3\pi^3} (4\pi^2 - 1)^{1/2} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 + t^2) dt = \frac{16}{9} (4\pi^2 - 1)^{1/2}. \end{aligned}$$

Capitolul 9

Integrale duble

În acest capitol vom extinde noțiunea de integrală, înlocuind intervalul de integrare $[a, b]$ cu un domeniu plan închis și mărginit. Vom considera numai acele domenii care au arie (sunt măsurabile Jordan), iar dintre acestea (pentru ușurință) pe acelea a căror frontieră este o curbă netedă pe porțiuni.

9.1 Mulțimi măsurabile Jordan

Definiția 9.1.1 Fie E o mulțime. O clasă \mathcal{K} de părți ale lui E se numește clan dacă are următoarele proprietăți:

1. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{K}, \forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{K}$;
2. $A_1 - A_2 \in \mathcal{K}, \forall A_1, A_2 \in \mathcal{K}$.

Observația 9.1.1 1. Dacă $A_1, A_2 \in \mathcal{K}$ atunci $A_1 \cap A_2 = A_1 - (A_1 - A_2) \in \mathcal{K}$.

2. Dacă $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{K}$ atunci $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{K}$.

Definiția 9.1.2 O funcție $m : \mathcal{K} \rightarrow V$, unde \mathcal{K} este un clan, iar V un spațiu vectorial se numește măsură dacă $m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2), \forall A_1, A_2 \in \mathcal{K}, A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

O măsură $m : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește măsură reală. O măsură reală m pentru care $m(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{K}$ se numește măsură pozitivă.

Proprietăți:

1. $m\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n m(A_i), \forall A_i \in \mathcal{K}, A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j, i, j = \overline{1, n}$;
2. $m(A_1 - A_2) = m(A_1) - m(A_2), \forall A_1, A_2 \in \mathcal{K}, A_2 \subset A_1$ (m este substractivă);
3. Dacă m este măsură pozitivă, atunci
 $m(A_2) \leq m(A_1), \forall A_1, A_2 \in \mathcal{K}, A_2 \subset A_1$ (m este crescătoare),
 $m\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n m(A_i), \forall A_i \in \mathcal{K}, i = \overline{1, n}$ (m este subaditivă).

După cum se știe, un poligon este domeniul plan mărginit de o linie poligonală închisă, fără puncte multiple. Fiecărui poligon P i se atașează un număr $a(P)$ numit aria poligonului. (Calculul ariei poligoanelor ne propunem a fi cunoscut). Clasa poligoanelor formează un clan.

Funcția $a : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ $a(P)$ = aria poligonului P , $P \in \mathcal{P}$, este o măsură pozitivă pe clanul poligoanelor \mathcal{P} .

Fie A o mulțime plană mărginită. Atunci există poligoanele $P, Q \in \mathcal{P}$ astfel ca $P \subset A \subset Q$. Poligonul P se numește poligon interior, iar Q poligon exterior.

$a(P) \leq a(Q)$, $\forall P, Q \in \mathcal{P}$, P poligon interior, iar Q poligon exterior.

Notăm $a_i(A) = \sup_{P \subset A} a(P)$ și $a_e(A) = \inf_{A \subset Q} a(Q)$. Numerele $a_i(A)$ și $a_e(A)$ se numesc aria interioară a mulțimii A , respectiv aria exterioară în sensul Jordan a lui A și avem $a(P) \leq a_i(A) \leq a_e(A) \leq a(Q)$, $\forall P, Q \in \mathcal{P}$, $P \subset A \subset Q$.

Definiția 9.1.3 *Mulțimea mărginită A din plan are arie (sau este măsurabilă Jordan) dacă $a_i(A) = a_e(A)$.*

Dacă mulțimea A este măsurabilă Jordan, atunci valoarea $a(A) = a_i(A) = a_e(A)$ se numește aria mulțimii A .

Observația 9.1.2 *Dacă mulțimea A este măsurabilă în sens Jordan, atunci $\forall P, Q \in \mathcal{P}$ $P \subset A \subset Q$ avem $a(P) \leq a(A) \leq a(Q)$.*

Criterii de măsurabilitate

Teorema 9.1.1 *Criteriul lui Darboux*

O mulțime plană A este măsurabilă dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ poligoanele $P_\varepsilon, Q_\varepsilon$, $P_\varepsilon \subset A \subset Q_\varepsilon$ așa încât

$$a(Q_\varepsilon) - a(P_\varepsilon) < \varepsilon \quad (9.1)$$

DEMONSTRAȚIE: \Rightarrow Presupunem mulțimea A măsurabilă. Atunci

$$a_i(A) = \sup_{P \subset A} a(P) = a(A) = \inf_{A \subset Q} a(Q) = a_e(A).$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$ există poligoanele $P_\varepsilon, Q_\varepsilon$, $P_\varepsilon \subset A \subset Q_\varepsilon$ astfel ca

$$a(A) < a(P_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad a(Q_\varepsilon) < a(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci, adunând cele două inegalități, se obține

$$a(Q_\varepsilon) - a(P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

\Leftarrow Presupunem că $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P_\varepsilon, Q_\varepsilon \in \mathcal{P}$, $P_\varepsilon \subset A \subset Q_\varepsilon$ astfel încât are loc (9.1). Avem

$$\begin{aligned} a(P_\varepsilon) &\leq a_i(A) \leq a_e(A) \leq a(Q_\varepsilon), \\ a_e(A) - a_i(A) &\leq a(Q_\varepsilon) - a(P_\varepsilon) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Prin urmare, $a_e(A) - a_i(A) < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, adică $a_e(A) = a_i(A)$, deci mulțimea A este măsurabilă.

Teorema 9.1.2 *O mulțime A este măsurabilă Jordan dacă și numai dacă există un șir de poligoane interioare (P_n) și unul de poligoane exterioare (Q_n) astfel ca șirurile ariilor lor ($a(P_n)$), ($a(Q_n)$) au aceeași limită. Mai mult*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(Q_n) = a(A). \quad (9.2)$$

DEMONSTRAȚIE: \Rightarrow Presupunem mulțimea A măsurabilă. Atunci, conform teoremei 9.1.1, pentru $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \geq 1$, există poligoanele $P_n, Q_n, P_n \subset A \subset Q_n, n \geq 1$ așa încât $a(Q_n) - a(P_n) < \frac{1}{n}$. Avem

$$\begin{aligned} a(A) - a(P_n) &\leq a(Q_n) - a(P_n) < \frac{1}{n} \quad \text{i} \\ a(Q_n) - a(A) &\leq a(Q_n) - a(P_n) < \frac{1}{n}, \quad \text{deci} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a(P_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a(Q_n) = a(A). \end{aligned}$$

\Leftarrow Presupunem că există șirurile de poligoane interioare, respectiv exterioare mulțimii $A, (P_n)$ și (Q_n) astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} a(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(Q_n)$. Deoarece $a(P_n) \leq a_i(A) \leq a_e(A) \leq a(Q_n)$, $\forall n \geq 1$ trecând la limită obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} a(Q_n) = a_i(A) = a_e(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(P_n)$, adică mulțimea A este măsurabilă și aria sa este dată de (9.2).

Lema 9.1.1 *Imaginea unei curbe netede are arie nulă.*

DEMONSTRAȚIE: Fie funcțiile $f, g \in C^1[a, b]$ și curba $C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, a \leq t \leq b$. Arătăm că $\text{Im } C$ are arie nulă. Pentru aceasta fie $\varepsilon > 0$ și $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ cu norma $\nu(\Delta) < \varepsilon$. Conform teoremei creșterilor finite pentru $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, $i = \overline{0, n-1}$ există punctele $\xi_i, \eta_i \in [t - i, t]$ astfel încât să avem $f(t) - f(t_i) = f'(\xi_i)(t - t_i)$, $g(t) - g(t_i) = g'(\eta_i)(t - t_i)$. Deoarece $f', g' \in C^0[a, b]$, atunci ele sunt mărginite pe $[a, b]$, deci există un număr $M > 0$ astfel încât $|f'(\xi_i)| \leq M, |g'(\eta_i)| \leq M$. Astfel $|f(t) - f(t_i)| \leq M(t - t_i) \leq M(t_{i+1} - t_i)$ și $|g(t) - g(t_i)| \leq M(t - t_i) \leq M(t_{i+1} - t_i)$ pentru $t_i \leq t \leq t_{i+1}, i = \overline{0, n-1}$.

Fie Q_i domeniul definit de pătratul cu centrul în punctul $(f(t_i), g(t_i))$ și având latura de lungime $2M(t_{i+1} - t_i)$. Avem $\text{Im}(C) \subset \bigcup_{i=\overline{0, n-1}} Q_i$ și notăm $a_e(C) =$ aria exterioară $a\text{Im}(C)$. Atunci

$$\begin{aligned} a_e(C) &< \sum_{i=0}^{n-1} a(Q_i) = \sum_{i=0}^{n-1} 4M^2(t_{i+1} - t_i)^2 < \\ &< \sum_{i=0}^{n-1} 4M^2\varepsilon(t_{i+1} - t_i) = 4M^2\varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost ales arbitrar, rezultă că $a_e(C) = 0$. Dacă notăm cu $a_i(C) =$ aria interioară $a\text{Im}(C)$, atunci $0 \leq a_i(C) \leq a_e(C)$, de unde $a_i(C) = a_e(C) = 0$, adică imaginea curbei C are arie nulă.

Teorema 9.1.3 *Dacă domeniul mărginit A este împărțit în două domenii A_1 și A_2 , cu ajutorul unei curbe netede pe porțiuni, atunci $a(A) = a(A_1) + a(A_2)$.*

DEMONSTRAȚIE: Fie $C_1 = A \cap C$. Din lema 9.1.1 rezultă $a(C) = 0$, deci $a(C_1) = 0$. Atunci

$$a(A) = a(A_1) + a(A_2) + a(A \cap C) = a(A_1) + a(A_2).$$

9.2 Integrala dublă. Noțiuni introductive

Definiția 9.2.1 *Un domeniu închis și mărginit se numește domeniu compact.*

Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mărginită pe domeniul compact D . Presupunem că $f(x, y) \geq 0$, pentru orice $(x, y) \in D$ și vrem să calculăm volumul corpului mărginit de suprafața S , unde S este suprafața dată de $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, planul xOy ($D = \text{pr}_{xOy} S$) și cilindrul cu generatoarele paralele cu axa OZ .

Pentru a putea calcula acest volum avem nevoie de câteva noțiuni. Domeniul D fiind mărginit el este interior unui interval $[a, b] \times [c, d]$.

Fie $\delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
 $\bar{\delta} : c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$

diviziuni ale intervalelor $[a, b]$ respectiv $[c, d]$.

Paralele prin punctele celor două diviziuni la axele de coordonate împart $[a, b] \times [c, d]$ în $m \times n$ dreptunghiuri $\delta_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, m-1}$. Notăm $\mathcal{D} = \{\delta_{ij} \mid \delta_{ij} \subset D \text{ sau } \delta_{ij} \text{ conține și puncte ale lui } D \text{ și ale lui } I - D\}$.

Definiția 9.2.2 *Se numește diviziune a domeniului compact D mulțimea dreptunghiurilor $\delta_{ij} \in \mathcal{D}$, notată prin $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p)$. Numărul real pozitiv*

$$\nu(\Delta) = \max_{\substack{i=0, n-1 \\ j=0, m-1}} (x_{i+1} - x_i, y_{j+1} - y_j) \leq (\nu(\delta), \nu(\bar{\delta}))$$

se numește norma diviziunii Δ .

Dacă diviziunile δ' și $\bar{\delta}'$ ale intervalelor $[a, b]$, respectiv $[c, d]$ sunt mai fine decât δ și $\bar{\delta}$ ($\delta \subset \delta'$ și $\bar{\delta} \subset \bar{\delta}'$), atunci vom spune că diviziunea Δ' a domeniului D (determinată de δ' și $\bar{\delta}'$) este mai fină decât diviziunea Δ și vom scrie $\Delta \subset \Delta'$, iar

$$\delta(\Delta') \leq \max(\nu(\delta'), \nu(\bar{\delta}')) \leq \max(\nu(\delta), \nu(\bar{\delta})).$$

Dacă Δ și Δ' sunt diviziuni ale domeniului D și dacă $\nu(\Delta') \leq \nu(\Delta)$ nu rezultă că Δ' este mai fină decât Δ .

Fie $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p)$ o diviziune a domeniului compact Δ . Vom nota cu

$$m_k = \inf_{(x,y) \in \delta_k} f(x, y), \quad M_k = \sup_{(x,y) \in \delta_k} f(x, y), \quad a_k = \text{aria } \delta_k, \quad k = \overline{1, p}$$

și considerăm sumele $s_\Delta = \sum_{k=1}^p m_k a_k$, $S_\Delta(f) = \sum_{k=1}^p M_k a_k$. Sumele $s_\Delta(f)$ și $S_\Delta(f)$ se numesc suma Darboux inferioară, respectiv superioară a funcției f corespunzătoare diviziunii Δ . Dacă $(\xi_k, \eta_k) \in \delta_k$, $k = \overline{1, p}$ suma $\sigma_\Delta(f) = \sum_{k=1}^p f(\xi_k, \eta_k) a_k$ se numește suma Riemann a funcției f corespunzătoare diviziunii D și punctelor intermediare $(\xi_k, \eta_k) \in \delta_k$.

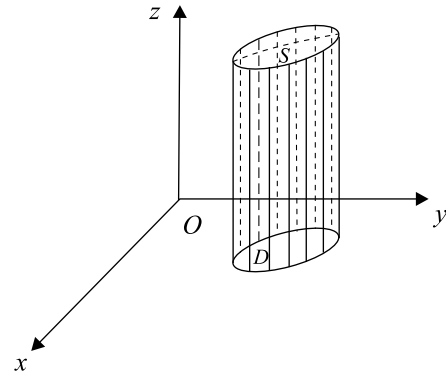


Figura 9.1:

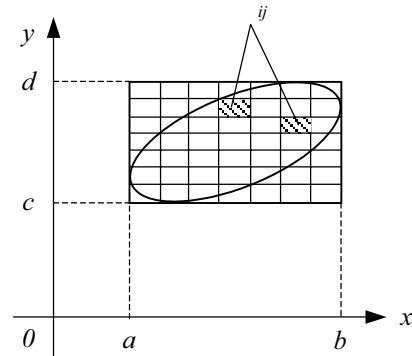


Figura 9.2:

9.3 Proprietăți ale sumelor Darboux și Riemann

1. $ma(D) \leq s_\Delta(f) \leq \sigma_\Delta(f) \leq S_\Delta(f) \leq Ma(D)$, unde $m = \inf_{(x,y) \in D} f(x,y)$, $M = \sup_{(x,y) \in D} f(x,y)$, iar $a(D)$ este aria domeniului D ;

$$2. \quad s_\Delta(f) = \inf_{(\xi_k, \eta_k) \in \delta_k} \sigma_\Delta(f), \quad S_\Delta(f) = \sup_{(\xi_k, \eta_k) \in \delta_k} \sigma_\Delta(f)$$

Într-adevăr, pentru orice $\varepsilon > 0$, deoarece $m_k = \inf_{(x,y) \in \delta_k} f(x,y)$, există $(\xi_k, \eta_k) \in \delta_k$ astfel încât

$$f(\xi_k, \eta_k) - m_k < \frac{\varepsilon}{a(D)}, \quad k = \overline{1, p}.$$

Atunci

$$\sigma_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sup_{k=\overline{1, p}} (f(\xi_k, \eta_k) - m_k) < \sum_{k=1}^p \frac{\varepsilon}{a(D)} a(\delta_k) = \varepsilon,$$

deci $\sigma_\Delta(f) - \varepsilon < s_\Delta(f) \leq \sigma_\Delta(f)$, adică $s_\Delta(f) = \inf_{(\xi_k, \eta_k) \in \delta_k} \sigma_\Delta(f)$. Analog se arată și cealaltă egalitate.

3. Dacă Δ și Δ' sunt diviziuni ale domeniului D , Δ' mai fină decât Δ , atunci

$$s_\Delta(f) \leq s_{\Delta'}(f) \leq S_{\Delta'}(f) \leq S_\Delta(f).$$

Presupunem că $\delta_k = \delta'_{k_1} \cup \delta'_{k_2}$, unde $\delta'_{k_1}, \delta'_{k_2} \in \Delta'$, iar

$$m'_k = \inf_{(x,y) \in \delta'_{k_1}} f(x,y), \quad m''_k = \inf_{(x,y) \in \delta'_{k_2}} f(x,y), \quad m_k \leq m'_k, \quad m_k \leq m''_k, \quad k = \overline{1, p}.$$

Atunci $m_k a(\delta'_{k_1}) \leq m'_k a(\delta'_{k_1})$, $m_k a(\delta'_{k_2}) \leq m''_k a(\delta'_{k_2})$, care prin adunare ne conduc la $m_k a(\delta_k) \leq m'_k a(\delta'_{k_1}) + m''_k a(\delta'_{k_2})$. Dacă δ_k este o reuniune finită de dreptunghiuri din Δ' se obține o inegalitate corespunzătoare și însumând după $k = \overline{1, p}$ rezultă $s_\Delta(f) \leq s_{\Delta'}(f)$.

Analog se arată că $S_{\Delta'}(f) \leq S_\Delta(f)$.

4. Oricare ar fi diviziunile Δ și Δ' ale domeniului D avem

$$s_\Delta(f) \leq S_{\Delta'}(f).$$

5. Dacă $\Delta^* = \{\Delta \mid \Delta \text{ diviziune a domeniului } D\}$ atunci

$$\sup_{\Delta \in \Delta^*} s_\Delta(f) \leq \inf_{\Delta \in \Delta^*} S_\Delta(f),$$

(s_Δ) este mărginită superior, iar (S_Δ) este mărginită inferior. Într-adevăr, dacă $\Delta' \in \Delta^*$, atunci, conform proprietății 4 $s_\Delta \leq S_{\Delta'}$, pentru orice $\Delta \in \Delta^*$, adică (s_Δ) este majorată de $S_{\Delta'}$, iar dacă $\Delta'' \in \Delta^*$, atunci $s_{\Delta''} \leq S_\Delta$, pentru orice $\Delta \in \Delta^*$, adică (S_Δ) este minorată de $s_{\Delta''}$.

6. Fie $f(x,y) \geq 0, (x,y) \in D$. Suma Darboux inferioară respectiv superioară reprezintă volumele corpurilor alcătuite din reuniunea a p paralelipede având ca bază dreptunghiurile și înălțimile corespunzătoare m_k , respectiv M_k , $k = \overline{1, p}$. Suma Riemann reprezintă volumul corpului alcătuit din reuniunea a p paralelipede având ca bază dreptunghiurile δ_k și înălțimile corespunzătoare $f(\xi_k, \eta_k)$, $(\xi_k, \eta_k) \in \delta_k$, $k = \overline{1, p}$.

Definiția 9.3.1 Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$ o funcție definită și mărginită pe domeniul compact D , Funcția f este integrabilă Riemann pe D . dacă există un număr real I ce verifică proprietatea:

pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca pentru orice $\Delta \in \Delta^*$ cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ și pentru orice $(\xi_k, \eta_k) \in \delta_k$ să avem $|\sigma_\Delta(f) - I| < \varepsilon$.

Numărul real I se numește integrala Riemann a funcției f pe domeniul D sau integrala dublă a funcției f pe D și se notează

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\nu(\Delta) \rightarrow 0} \sigma_\Delta(f).$$

Observația 9.3.1 1. Expresia $dx dy$ se numește element de arie în coordonate carteziane.

2. Dacă $f(x, y) \geq 0, (x, y) \in D$ și f integrabilă pe D , atunci $\iint_D f(x, y) dx dy$ reprezintă volumul corpului mărginit de suprafața $S : z = f(x, y), (x, y) \in D (D = pr_{xOy} S)$, planul xOy și cilindrul proiectant al conturului lui S pe conturul lui D .

Teorema 9.3.1 Criteriul de integrabilitate al lui Darboux.

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită și mărginită pe domeniul compact D din plan. Funcția f este integrabilă pe D dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca pentru orice $\Delta \in \Delta^*$ cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ să avem $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$.

DEMONSTRAȚIE. \Rightarrow Presupunem funcția f mărginită și integrabilă pe D . Atunci conform definiției 9.3.1 există $I = \iint_D f(x, y) dx dy \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $\Delta \in \Delta^*$ cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ și pentru orice alegere a punctelor intermediare $(\xi_k, \eta_k) \in \delta_k$ să avem $|\sigma_k(f) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Conform proprietății 2 avem $I - \frac{\varepsilon}{2} < s_\Delta(f) \leq S_\Delta(f) < I + \frac{\varepsilon}{2}$, deci $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < I + \frac{\varepsilon}{2} - (I - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$.

\Leftarrow Presupunem că este îndeplinită condiția din enunțul teoremei. Pentru orice $\Delta \in \Delta^*$ avem $s_\Delta(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_\Delta(f)$, unde $\underline{I} = \sup_{\Delta \in \Delta^*} s_\Delta$, iar $\bar{I} = \inf_{\Delta \in \Delta^*} S_\Delta$.

Dacă $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$, atunci $\bar{I} - \underline{I} \leq S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$. Cum $\varepsilon > 0$ este ales arbitrar, rezultă $\underline{I} = \bar{I}$. Notând $\underline{I} = \bar{I} = I$ avem

$$s_\Delta(f) \leq I \leq S_\Delta(f), \quad s_\Delta(f) - S_\Delta(f) \leq \sigma_\Delta(f) - I \leq S_\Delta(f) - s_\Delta(f),$$

deci $|\sigma_\Delta(f) - I| < \varepsilon$ pentru orice $\Delta \in \Delta^*$ cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$, adică f este integrabilă și $I = \iint_D f(x, y) dx dy$.

Definiția 9.3.2 O funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definită și mărginită pe domeniul compact D plan este integrabilă pe D dacă pentru orice șir de diviziuni (Δ_n) ale domeniului D cu $\nu(\Delta_n) \rightarrow 0$ șirurile sumelor Darboux (s_{Δ_n}) și (S_{Δ_n}) au o limită comună finită. În acest caz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\Delta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n} = \iint_D f(x, y) dx dy$$

Teorema 9.3.2 Orice funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definită și continuă pe domeniul compact D plan este integrabilă pe D .

DEMONSTRAȚIE. Fie $\Delta \in \Delta^*, \Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p)$. Funcția f fiind continuă pe D ea este continuă pe mulțimile compacte $\delta_k, k = \overline{1, p}$, deci f este mărginită și își atinge marginile pe

$\delta_k, k = \overline{1, p}$. Astfel, există punctele $(x'_k, y'_k), (x''_k, y''_k) \in \delta_k$ încât $f(x'_k, y'_k) = m_k, f(x''_k, y''_k) = M_k$.
Avem

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) = \sum_{k=1}^p (M_k - m_k) a(\delta_k) = \sum_{k=1}^p (f(x''_k, y''_k) - f(x'_k, y'_k)) a(\delta_k).$$

Pe de altă parte, funcția f este uniform continuă pe D , deoarece ea este continuă pe domeniul compact D , deci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $(x, y), (x', y') \in D$ cu $|x - x'| < \delta(\varepsilon), |y - y'| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(x, y) - f(x', y')| < \frac{\varepsilon}{a(\Delta)}$.

Deoarece pentru orice diviziune Δ , cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ avem $|x'_k - x''_k| < \delta(\varepsilon), |y'_k - y''_k| < \delta(\varepsilon)$ rezultă

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) \leq \frac{\varepsilon}{a(D)} \sum_{k=1}^n a(\delta_k) = \varepsilon,$$

adică f este integrabilă pe D .

Teorema 9.3.3 Dacă mulțimea T a punctelor de discontinuitate a unei funcții mărginite f definită pe un domeniu închis și mărginit $D(T \subset D)$ este formată dintr-un număr finit de arce netede, atunci funcția f este integrabilă pe domeniul D .

DEMONSTRAȚIE: Deoarece funcția f este mărginită, rezultă y că există un număr $M > 0$ astfel încât $|f(x, y)| \leq M, \forall (x, y) \in D$.

Fie D_1 mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției f . Mulțimea D_1 fiind mărginită există un poligon Q astfel încât $D_1 \subset Q$ și $a(Q) < \frac{\varepsilon}{4M}$.

Fie $D_2 = D - \overset{\circ}{Q}$. Mulțimea D_2 este închisă și mărginită și, cum f este continuă pe D_2 , rezultă că f este uniform continuă pe D_2 .

Alegem $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p)$ o diviziune a mulțimii D_2 astfel încât $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{2a(D)}$, unde $M_i = \sup_{(x,y) \in \delta_i} f(x, y), m_i = \inf_{(x,y) \in \delta_i} f(x, y), i = \overline{1, n}$.

La această partiție se adaugă Q .

$$\begin{aligned} S_{\Delta} - s_{\Delta} &= M' a(Q) - m' a(Q) + \sum_{i=1}^p (M_i - m_i) a(\delta_i) \leq \\ &\leq (M' - m') \frac{\varepsilon}{4M} + \sum_{i=1}^p \frac{\varepsilon}{2a(D)} a(\delta_i) < 2M \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2a(D)} a(D) = \varepsilon, \end{aligned}$$

unde $m' = \inf_{(x,y) \in Q} f(x, y), M' = \sup_{(x,y) \in Q} f(x, y)$.

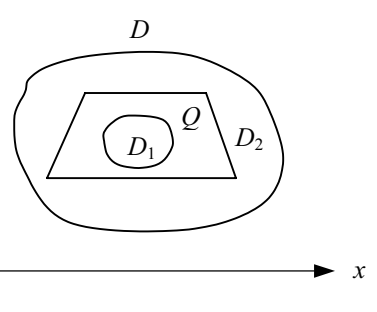


Figura 9.3:

9.4 Proprietățile integralei duble

1. Proprietatea de linearitate a integralei duble.

Dacă f, g sunt integrabile pe D , atunci $f + g$ este integrabilă pe D și

$$\iint_D (f(x, y) + g(x, y)) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy.$$

2. Proprietatea de omogenitate a integralei duble.

Dacă f este integrabilă pe D și $\lambda \in \mathbb{R}$, atunci λf este integrabilă pe D și

$$\iint_D \lambda f(x, y) dx dy = \lambda \iint_D f(x, y) dx dy.$$

3. Proprietatea de aditivitate a integralei duble (funcție de domeniu).

Dacă f este integrabilă pe D , iar domeniul $D = D_1 \cup D_2$, unde D_1 și D_2 sunt domenii compacte și curba C are arie nulă, atunci f este integrabilă pe D_1 și pe D_2 și

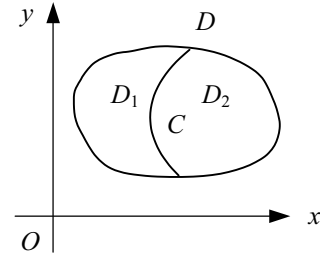


Figura 9.4:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

4. Dacă f este integrabilă pe D și $f(x, y) \geq 0$, pentru orice $(x, y) \in D$, atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0.$$

5. Proprietatea de monotonie a integralei duble.

Dacă f și g sunt integrabile pe D și $f(x, y) \geq g(x, y)$, pentru orice $(x, y) \in D$, atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy.$$

6. Dacă f este integrabilă pe D , atunci și $|f|$ este integrabilă pe D și

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy.$$

7. $\iint_D dx dy = a(D)$.

Formule de medie pentru integrala dublă.

8. Dacă f este mărginită și integrabilă pe D , $m \leq f(x, y) \leq M$, $(x, y) \in D$, atunci există un număr $\mu \in [m, M]$ astfel încât să avem

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \mu a(D).$$

9. Dacă f este continuă pe D , atunci există un punct $(\xi, \eta) \in D$ astfel încât

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) a(D).$$

10. Existența și valoarea unei integrale duble nu depinde de valorile funcției de-a lungul unui număr finit de curbe netede.

9.5 Calculul integralelor duble

1. Considerăm cazul în care domeniul compact D este dreptunghiul $[a, b] \times [c, d]$.

Teorema 9.5.1 Fie funcția f definită, mărginită și integrabilă pe dreptunghiul $D = [a, b] \times [c, d]$.

Dacă pentru orice $x \in [a, b]$ există integrala $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, atunci există și integrala $\int_a^b F(x) dx$ și

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

DEMONSTRAȚIE. Fie $\delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ și $\bar{\delta} : c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ diviziuni ale intervalor $[a, b]$ și $[c, d]$, iar Δ diviziunea corespunzătoare domeniului D .

Notăm $\delta_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $\delta_{ij} \in \Delta$,

$$m_{ij} = \inf_{(x, y) \in \delta_{ij}} f(x, y), \quad M_{ij} = \sup_{(x, y) \in \delta_{ij}} f(x, y), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{0, m-1}.$$

Considerăm punctele intermediare $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$ și suma Riemann

$$\sigma_\delta(F) = \sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (9.3)$$

Avem $F(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y) dy = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y) dy$ și aplicând teorema de medie, rezultă că există un punct $\mu_{ij} \in [m_{ij}, M_{ij}]$ așa încât

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y) dy = \mu_{ij}(y_{j+1} - y_j), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{0, m-1}.$$

Atunci, (9.3) devine

$$\sigma_\delta(F) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \mu_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

Sumele Darboux ale funcției f corespunzătoare diviziunii Δ sunt date de

$$s_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j),$$

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j), \quad \text{iar}$$

$$s_\Delta(f) \leq \sigma_\delta(F) \leq S_\Delta(f). \quad (9.4)$$

Fie (δ_n) și $(\bar{\delta}_n)$ șiruri de diviziuni ale intervalor $[a, b]$ și $[c, d]$ cu $\nu(\delta_n) \rightarrow 0$, $\nu(\bar{\delta}_n) \rightarrow 0$, (Δ_n) șirul corespunzător de diviziuni al lui D (evident și $\nu(\Delta_n) \rightarrow 0$), iar (ξ_i^n) șir de puncte intermediare ale șirului (δ_n) . Conform relației (9.4) avem

$$s_{\Delta_n}(f) \leq \sigma_{\delta_n}(F) \leq S_{\Delta_n}(f). \quad (9.5)$$

Funcția f fiind integrabilă pe D avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\Delta_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n}(f) = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Trecând la limită în (9.5) obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\delta_n}(F) = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

deci

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Teorema 9.5.2 Fie funcția f definită, mărginită și integrabilă pe dreptunghiul $D = [a, b] \times [c, d]$.

Dacă pentru orice $y \in [c, d]$ există integrala $G(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, atunci există și integrala $\int_c^d G(y) dy$ și

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Observația 9.5.1 Dacă $f(x, y) = g(x)h(y)$, $(x, y) \in D = [a, b] \times [c, d]$ și sunt îndeplinite condițiile teoremei 9.5.1 sau teoremei 9.5.2, atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right).$$

Exemplu 9.5.1 1. Să se calculeze integrala $I = \iint_D (1-x)(1-xy) dx dy$, domeniul D fiind $1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1$.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 \left(\int_0^1 (1-x)(1-xy) dy \right) dx = \int_1^3 (1-x) \left(y - \frac{xy^2}{2} \right) \Big|_0^1 dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 (1-x)(2-x) dx = \frac{1}{2} \left(2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^3 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2. Fie domeniul compact D mărginit de curba C netedă pe porțiuni și presupunem că orice paralelă la axa Oy taie curba închisă C numai în două puncte.

$$D = \{(x, y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \quad x \in [a, b]\}, \quad (9.6)$$

unde $y = \varphi_1(x), x \in [a, b]$ este ecuația arcului AEB , iar $y = \varphi_2(x), x \in [a, b]$ este ecuația arcului CFG , $\varphi_1 \in C^1[a, b]$, $\varphi_2 \in C^1[c, d]$. Un astfel de domeniu se numește simplu în raport cu axa Oy .

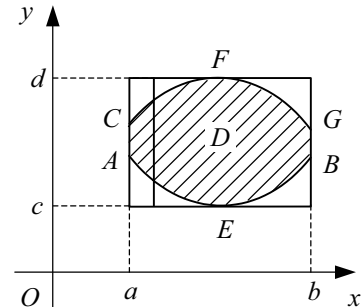


Figura 9.5:

Teorema 9.5.3 Fie funcția f definită, mărginită și integrabilă pe domeniul compact D dat de (9.6) și presupunem că există integrala $F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$, $\forall x \in [a, b]$. Atunci există și integrala $\int_a^b F(x) dx$ și are loc egalitatea

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

DEMONSTRAȚIE. Fie $I = [a, b] \times [c, d]$ și funcția $\bar{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{dacă } (x, y) \in D \\ 0, & \text{dacă } (x, y) \in I - D. \end{cases}$$

$I = D \cup D_1 \cup D_2$, unde domeniile D_1 și D_2 sunt definite prin

$$D_1 : \begin{array}{l} c \leq y \leq \varphi_1(x) \\ x \in [a, b] \end{array} \quad i \quad D_2 : \begin{array}{l} \varphi_2(x) \leq y \leq d \\ x \in [a, b] \end{array}.$$

Deoarece $\varphi_1, \varphi_2 \in C^0[a, b]$, conform lemei 9.1.1, frântiera fiecăruia dintre domeniile D, D_1 și D_2 este de arie nulă.

Funcția \bar{f} este integrabilă pe I , deoarece f este integrabilă pe D , iar eventualele puncte de discontinuitate ale funcției \bar{f} în plus față de f sunt situate pe una dintre frontierele domeniilor D, D_1, D_2 .

Atunci conform proprietății de aditivitate a integralei duble avem

$$\iint_I \bar{f}(x, y) dx dy = \iint_{D_1} \bar{f}(x, y) dx dy + \iint_D \bar{f}(x, y) dx dy + \iint_{D_2} \bar{f}(x, y) dx dy.$$

Dar

$$\iint_{D_1} \bar{f}(x, y) dx dy = 0 \quad \iint_{D_2} \bar{f}(x, y) dx dy = 0$$

Deci are loc egalitatea

$$\iint_I \bar{f}(x, y) dx dy = \iint_D \bar{f}(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (9.7)$$

Deoarece există integrala $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$, atunci există și integrala $\int_c^d \bar{f}(x, y) dy$ și are loc relația

$$\begin{aligned} \int_c^d \bar{f}(x, y) dy &= \int_c^{\varphi_1(x)} \bar{f}(x, y) dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \bar{f}(x, y) dy + \int_{\varphi_2(x)}^d \bar{f}(x, y) dy = \\ &= \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \end{aligned} \quad (9.8)$$

Aplicând teorema 9.5.1 funcției \bar{f} și domeniului I se obține că există integrala $\int_a^b F(x) dx$ și

$$\iint_I \bar{f}(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d \bar{f}(x, y) dy \right) dx,$$

care împreună cu relațiile (9.7) și (9.8) ne dau

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Fie domeniul compact D mărginit de curba închisă C netedă pe porțiuni și presupunem că orice paralelă la axa Ox taie curba C numai în două puncte.

$$D = \{(x, y) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \quad y \in [c, d]\}, \quad (9.9)$$

unde $x = \psi_1(y), y \in [a, b]$ este ecuația arcului CEG , iar $x = \psi_2(y), y \in [a, b]$ este ecuația arcului AFB , $\psi_1 \in C^1[c, d]$, $\psi_2 \in C^1[c, d]$. Un astfel de domeniu se numește simplu în raport cu axa Ox .

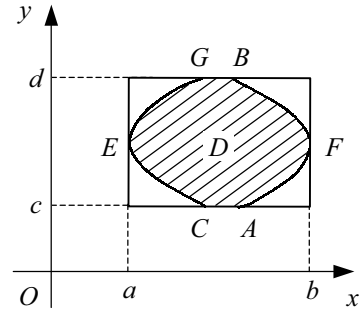


Figura 9.6:

Teorema 9.5.4 Fie funcția f definită, mărginită și integrabilă pe domeniul compact D dat de (9.9) și presupunem că există integrala $G(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$, pentru orice $y \in [c, d]$. Atunci există și integrala $\int_c^d G(y) dy$ și are loc egalitatea

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Observația 9.5.2 1. Dacă domeniul compact D nu este într-una dintre situațiile (9.6) sau (9.9), atunci se descompune D într-un număr finit de subdomenii D_1, D_2, \dots, D_n cu $\bigcup_{k=1}^n D_k = D$ prin arce de curbă de arie nulă și fiecare D_i să fie într-una din situațiile (9.6) sau (9.9).

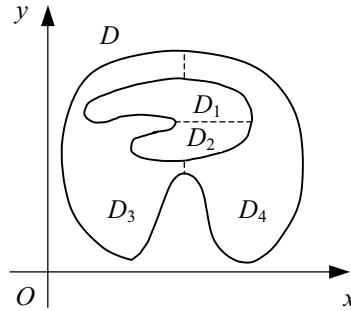


Figura 9.7:

Folosind proprietatea 3 se obține

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^n \iint_{D_k} f(x, y) dx dy$$

2. Dacă funcția f este continuă pe domeniul D , atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Exemplu 9.5.2 1. Să se calculeze integrala $I = \iint_D xy dx dy$, domeniul D fiind limitat de $y = x^2$ și $y = 2x + 3$ (vezi fig. 9.8).

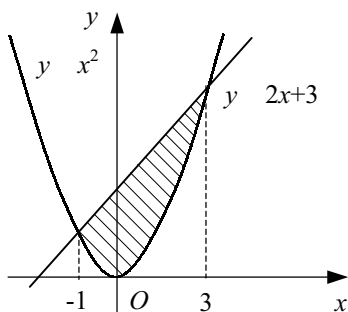


Figura 9.8:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^3 \left(\int_{x^2}^{2x+3} xy dy \right) dx = \int_{-1}^3 \frac{xy^2}{2} \Big|_{x^2}^{2x+3} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^3 x[(2x+3)^2 - x^4] dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^3 (4x^3 + 12x^2 + 9x - x^5) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left(x^4 + 4x^2 + \frac{9x^2}{2} - \frac{x^6}{6} \right) \Big|_{-1}^3 = \frac{160}{3}
 \end{aligned}$$

2. Să se calculeze integrala $I = \iint_D \cos(x+y) dx dy$, domeniul D fiind limitat de $x=0, y=\pi$ și $y=x$ (vezi fig. 9.9).

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^\pi \left(\int_0^y \cos(x+y) dx \right) dy = \int_0^\pi (\sin(x+y) \Big|_0^y) dy = \\
 &= \int_0^\pi (\sin 2y - \sin y) dy = \left(-\frac{\cos 2y}{2} + \cos y \right) \Big|_0^\pi = -2
 \end{aligned}$$

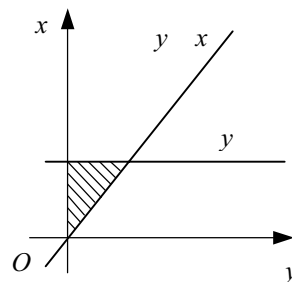


Figura 9.9:

9.6 Formula lui Green

Fie D un domeniu compact, mărginit de curba închisă C netedă pe porțiuni și presupunem că paralelele la axele Ox și Oy taie curba C numai în două puncte.

Teorema 9.6.1 *Formula lui Green (1793 - 1841)*

Fie P și Q două funcții definite și continue pe D , derivabile parțial și cu derivatele parțiale P'_y și Q'_x continue pe D . Atunci are loc următoarea egalitate:

$$\iint_D (Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)) dx dy = \oint_C P(x,y) dx + Q(x,y) dy.$$

DEMONSTRAȚIE. Fie domeniul D din figura 9.10, curba C de forma $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ orientată direct.

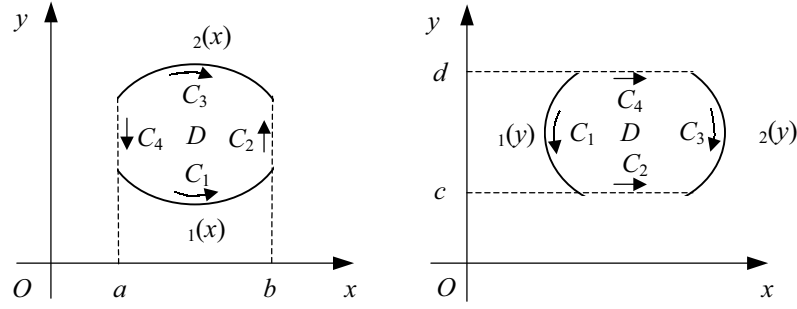


Figura 9.10:

$$\begin{aligned}
 \iint_D P'_y(x, y) dx dy &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} P'_y(x, y) dy \right) dx = \int_a^b P(x, y) \Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx = \\
 &= \int_a^b (P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))) dx
 \end{aligned} \tag{9.10}$$

Curba C_1 fiind definită de reprezentarea $\begin{cases} x = t \\ y = \varphi_1(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$ avem

$$\int_{C_1} P(x, y) dx = \int_a^b P(t, \varphi_1(t)) dt \tag{9.11}$$

Curba C_3 fiind definită de reprezentarea $\begin{cases} x = t \\ y = \varphi_2(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$ avem

$$\int_{C_3} P(x, y) dx = \int_a^b P(t, \varphi_2(t)) dt \tag{9.12}$$

Deoarece pentru curbele C_2 și C_4 avem $x = a$, respectiv $x = b$ se obține

$$\int_{C_2} P(x, y) dx = 0 \quad \text{și} \quad \int_{C_4} P(x, y) dx = 0 \tag{9.13}$$

$$\oint_C P(x, y) dx = \int_{C_1} P(x, y) dx + \int_{C_2} P(x, y) dx + \int_{C_3} P(x, y) dx + \int_{C_4} P(x, y) dx \tag{9.14}$$

Din (9.10), (9.11), (9.12), (9.13) și (9.14) rezultă

$$\iint_D P'_y(x, y) dx dy = - \int_{C_1} P(x, y) dx - \int_{C_3} P(x, y) dx = - \oint_C P(x, y) dx \tag{9.15}$$

Fie domeniul D din figura 9.10, curba C de forma $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$.

$$\begin{aligned}
 \iint_D Q'_x(x, y) dx dy &= \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} Q'_x(x, y) dx \right) dy = \int_c^d Q(x, y) \Big|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dy = \\
 &= \int_c^d (Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)) dy
 \end{aligned} \tag{9.16}$$

Curba C_1 fiind definită de prezentarea $\begin{cases} x = \psi_1(t) \\ y = t \end{cases}$, $t \in [c, d]$ avem

$$\int_{C_1} Q(x, y) dy = \int_c^d Q(\psi_1(t), t) dt \quad (9.17)$$

Curba C_3 fiind definită de reprezentarea avem $\begin{cases} x = \psi_2(t) \\ y = t \end{cases}$, $t \in [c, d]$ avem

$$\int_{C_3} Q(x, y) dy = \int_c^d Q(\psi_2(t), t) dt \quad (9.18)$$

Deoarece pentru curbele C_2 și C_4 avem $y = c$, respectiv $y = b$ se obține

$$\int_{C_2} Q(x, y) dx = 0 \quad \text{și} \quad \int_{C_4} Q(x, y) dx = 0 \quad (9.19)$$

$$\oint_C Q(x, y) dx = \int_{C_1} Q(x, y) dx + \int_{C_2} Q(x, y) dx + \int_{C_3} Q(x, y) dx + \int_{C_4} Q(x, y) dx \quad (9.20)$$

Din (9.16), (9.17), (9.18), (9.19) și (9.20) rezultă

$$\iint_D Q'_x(x, y) dx dy = \int_{C_1} Q(x, y) dy + \int_{C_3} Q(x, y) dy = \oint_C Q(x, y) dy \quad (9.21)$$

Scăzând relația (9.15) din (9.21) se obține:

$$\iint_D (Q'_x(x, y) - P'_y(x, y)) dx dy = \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Dacă domeniul D nu îndeplinește condiția ca paralelele la axele Ox și Oy să taie curba C numai în două puncte, împărțim domeniul D prin arce de curbă de arie nulă într-un număr finit de subdomenii D_1, D_2, \dots, D_n mărginite de curbele C_1, C_2, \dots, C_n care îndeplinesc condiția de mai sus.

Aplicând pentru fiecare subdomeniu D_k mărginit de curba C_k teorema 9.6.1, avem

$$\iint_{D_k} (Q'_x(x, y) - P'_y(x, y)) dx dy = \oint_{C_k} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad k = \overline{1, n} \quad (9.22)$$

Orientarea pozitivă a subdomeniilor D_1, D_2, \dots, D_n induce pe curba C un sens bine determinat pe care-l vom numi sensul pozitiv. Astfel vom spune despre domeniul D că a fost orientat pozitiv (vezi fig.9.11). Deoarece $D = \bigcup_{k=1}^n D_k$, $C = \bigcup_{k=1}^n C_k$, adunând cele n relații din (9.22) și aplicând proprietatea de aditivitate a integralei duble (ca funcție de domeniu) avem

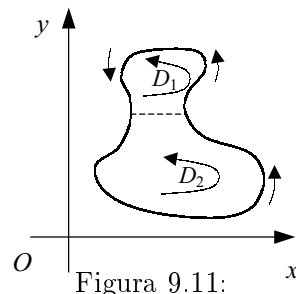


Figura 9.11:

$$\iint_D (Q'_x(x, y) - P'_y(x, y)) dx dy = \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

Teorema 9.6.2 Fie P și Q două funcții definite și continue pe domeniul compact D mărginit de curba C simplă, închisă și rectificabilă și presupunem că derivatele parțiale P'_y și Q'_y există și sunt continue pe D . Atunci are loc următoarea egalitate

$$\iint_D (Q'_x(x, y) - P'_y(x, y)) dx dy = \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

DEMONSTRAȚIE. vezi [10] vol.II pag. 190.

Exemplu 9.6.1 Să se calculeze integrala curbilinie $I = \oint_C -xy^2 dx + x^2 y dy$, folosind formula lui Green, unde $C : x^2 + y^2 = a^2, a > 0$.

Curba C este netedă și închisă și ea mărginește domeniul $D : x^2 + y^2 \leq a^2$. Funcțiile $P(x, y) = -xy^2$ și $Q(x, y) = x^2 y$ sunt de clasă $C^1(D)$ și deci se poate aplica formula lui Green.

Avem

$$I = \iint_D 4xy dx dy = 4 \int_{-a}^a \left(x \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y dy \right) dx = 0.$$

9.7 Exprimarea ariei unui domeniu cu ajutorul unei integrale curbilinii

Fie D un domeniu pentru care se poate aplica formula lui Green și care are arie.

$a(D) = \iint_D dx dy$ și aplicând formula lui Green observăm că funcțiile P și Q trebuie alese astfel ca $Q'_x(x, y) - P'_y(x, y) = 1$.

Atunci aria domeniului D este

$$a(D) = \oint_C x dy, \quad (9.23)$$

unde am considerat $P(x, y) = 0$ și $Q(x, y) = x$, pentru orice $(x, y) \in D$.

Exemplu 9.7.1 Să se calculeze aria domeniului D limitat de $y = x^2$ și $y = x$ (vezi fig. 9.12).

Avem

$$a(D) = \iint_D dx dy = \oint_C x dy = \int_{C_1} x dy + \int_{C_2} x dy,$$

unde $C_1 : y = x^2, x \in [0, 1], C_2 : y = 1 - x, x \in [0, 1]$, deci

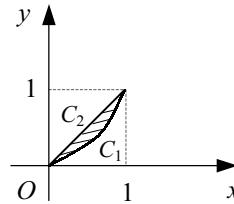


Figura 9.12:

$$a(D) = \int_0^1 2x^2 dx - \int_0^1 x dx = \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

9.8 Schimbarea de variabilă la integrala dublă

În planul xOy considerăm domeniul compact D mărginit de o curbă C închisă, netedă pe porțiuni, iar în planul uOv domeniul compact D' mărginit de o curbă C' închisă și netedă pe porțiuni. Fie transformarea regulată a domeniului D' în D dată de

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in D', \varphi, \psi \in C^1(D'), \quad (9.24)$$

bijective și cu derivatele parțiale de ordinul al doilea mixte continue pe D' .

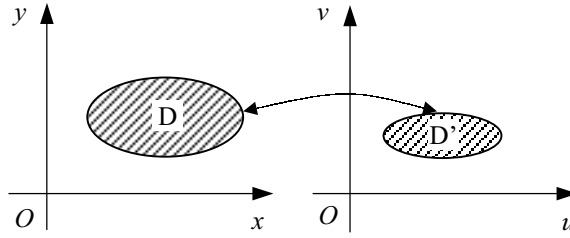


Figura 9.13:

Se definește corespondența dintre domeniile D' și D ca fiind directă, respectiv inversă, dacă atunci când un punct parcurge curba C' în sens direct, punctul corespunzător, prin transformarea (9.24), de pe curba C se deplasează în sens direct respectiv invers.

Teorema 9.8.1 *Dacă determinantul funcțional $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$, $(u, v) \in D'$, este pozitiv respectiv negativ, atunci transformarea domeniului D' în domeniul D este directă, respectiv inversă și există un punct $(u_0, v_0) \in D'$ astfel încât*

$$a(D) = \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \right| a(D').$$

DEMONSTRAȚIE. Din (9.23) aria domeniului D este $a(D) = \oint_C x dy$. Fie transformarea regulată (9.24) a domeniului D' în D . Atunci

$$\begin{aligned} a(D) &= \oint_{C'} \varphi(u, v) [\psi'_u(u, v) du + \psi'_v(u, v) dv] = \\ &= \int_{C'} \varphi(u, v) \psi'_u(u, v) du + \varphi(u, v) \psi'_v(u, v) dv \end{aligned} \quad (9.25)$$

Deoarece există derivatele parțiale mixte de ordinul al doilea ale funcțiilor φ și ψ' continue pe D' , avem:

$$\begin{aligned} P(u, v) &= \varphi(u, v) \psi'_u(u, v), & Q(u, v) &= \varphi(u, v) \psi'_v(u, v), \\ P'_v(u, v) &= \varphi'_v(u, v) \psi'_u(u, v) + \varphi(u, v) \psi''_{uv}(u, v) & \text{și} \\ Q'_u(u, v) &= \varphi'_u(u, v) \psi'_v(u, v) + \varphi(u, v) \psi''_{vu}(u, v). \end{aligned}$$

Aplicând formula lui Green integralei (9.25) se obține

$$\begin{aligned}
 a(D) &= \oint_{C'} P(u, v)du + Q(u, v)dv = \iint_{D'} (Q'_u(u, v) - P'_v(u, v))dudv = \\
 &= \iint_{D'} (\varphi'_u(u, v)\psi'_v(u, v) - \varphi'_v(u, v)\psi'_u(u, v))dudv = \\
 &= \iint_{D'} \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix} dudv.
 \end{aligned} \tag{9.26}$$

Întrucât $a(D) > 0$, dacă $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} > 0$, curba C' este parcursă în sens direct și din (9.26) avem $a(D) = \iint_{D'} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}dudv$, iar dacă $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} < 0$, atunci curba C' este parcursă în sens invers și din (9.26) rezultă $a(D) = \iint_{D'} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}dudv$, adică $a(D) = \iint_{D'} \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| dudv$.

Aplicând formula de medie ultimei relații, rezultă că există un punct $(u_0, v_0) \in D'$ astfel încât

$$a(D) = \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \right| a(D')$$

Teorema 9.8.2 *Fie domeniile compacte D' și D în corespondență prin transformarea regulată (9.24). Dacă f este o funcție continuă pe domeniul D , atunci are loc următoarea egalitate*

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| dudv, \tag{9.27}$$

numită formula schimbării de variabilă la integrala dublă.

DEMONSTRAȚIE. Considerăm, $\Delta' = (\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_p)$ o diviziune a domeniului D' . Prin transformarea (9.24) acestei diviziuni îi corespunde diviziunea $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p)$ a domeniului D . Dacă $a(\delta_k), a(\delta'_k)$ sunt ariile dreptunghiurilor δ_k respectiv $\delta'_k, k = \overline{1, p}$, atunci conform teoremei 9.8.1 există punctele $(u_k, v_k) \in \delta'_k$ astfel încât să avem

$$a(\delta_k) = \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}(u_k, v_k) \right| a(\delta'_k).$$

Fie $x_k = \varphi(u_k, v_k), y_k = \psi(u_k, v_k), k = \overline{1, n}, (u_k, v_k) \in \delta'_k$. Atunci

$$\begin{aligned}
 \sigma_\Delta(f) &= \sum_{k=1}^p f(x_k, y_k)a(\delta_k) = \\
 &= \sum_{k=1}^p f(\varphi(u_k, v_k), \psi(u_k, v_k)) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}(u_k, v_k) \right| a(\delta'_k) = \\
 &= \sigma_{\Delta'} \left(f(\varphi, \psi) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| \right)
 \end{aligned}$$

Dacă (Δ'_n) este un șir de diviziuni ale domeniului D' cu $\nu(\Delta'_n) \rightarrow 0$, atunci șirul corespunzător de diviziuni ale domeniului D , prin transformarea (9.24), (Δ_n) are $\nu(\Delta_n) \rightarrow 0$. Avem

$$\sigma_{\Delta_n}(f) = \sigma_{\Delta'_n} \left(f(\varphi, \psi) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| \right) \tag{9.28}$$

și trecând la limită în (9.28), rezultă

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| du dv.$$

Exemplu 9.8.1 1. Să se calculeze integrala $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, domeniul D fiind $x^2 + y^2 \leq 2ax$, $a > 0$. Domeniul D este mărginit de cercul $(x - a)^2 + y^2 = a^2$. Trecând la coordonatele polare $\begin{cases} x = a + r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$, rezultă $t \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, a]$, deci domeniul D' este dreptunghiul $[0, 2\pi] \times [0, a]$ (vezi fig. 9.14).

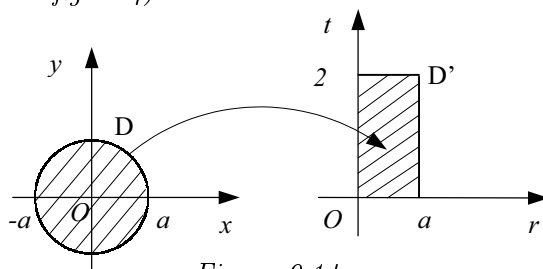


Figura 9.14:

Cu ajutorul formulei (9.27) se obține

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a (a^2 + 2ar \cos t + r^2) r dr \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} a^2 r^2 + \frac{2}{3} ar^3 \cos t + \frac{1}{4} r^4 \right) \Big|_0^a dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} a^4 + \frac{2}{3} a^4 \cos t \right) dt = \left(\frac{3}{4} a^4 + \frac{2}{3} a^4 \sin t \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2} a^4 \end{aligned}$$

2. Să se calculeze integrala $I = \iint_D x dx dy$, domeniul D fiind dat de $1 \leq xy \leq 2$, $1 \leq \frac{y}{x} \leq 2$, $x > 0$.

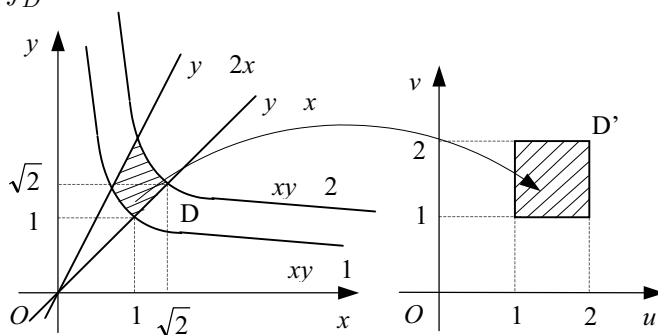


Figura 9.15:

Folosim transformarea regulată $u = xy, v = \frac{y}{x}, u \in [1, 2], v \in [1, 2]$, care transformă domeniul D în domeniul D' (vezi fig. 9.15).

Inversa acestei transformări este $x = \sqrt{\frac{u}{v}}, y = \sqrt{uv}$, iar

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}v^{-1} \neq 0$$

Atunci

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{3}{2}} dv \right) du = - \int_1^2 \left(u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \right) \Big|_1^2 du = \\ &= \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{5\sqrt{2} - 6}{3} \end{aligned}$$

9.9 Aplicații ale integralei duble

Dacă D este o placă materială de grosime neglijabilă, $D \subset xOy$ și funcția $\rho(x, y)$ definită și continuă pe D reprezintă densitatea plăcii, atunci masa plăcii D este dată de relația

$$M(D) = \iint_D \rho(x, y) dx dy,$$

iar coordonatele centrului de greutate G al plăcii sunt date de relațiile

$$x_G = \frac{1}{M(D)} \iint_D x \rho(x, y) dx dy, \quad y_G = \frac{1}{M(D)} \iint_D y \rho(x, y) dx dy.$$

Dacă placa D este omogenă atunci

$$x_G = \frac{1}{a(D)} \iint_D x dx dy, \quad y_G = \frac{1}{a(D)} \iint_D y dx dy.$$

Momentele de inerție ale plăcii sunt date de relațiile

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy \quad (\text{față de originea } O) \\ I_x &= \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy \end{aligned}$$

(față de axele de coordonate Ox și Oy)

Exemplu 9.9.1 1. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate ale plăcii omogene mărginită de curbele $y^2 = 4x + 4$ și $y^2 = -2x + 4$ (vezi figura 9.16)

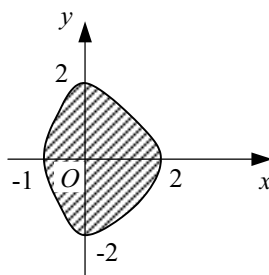


Figura 9.16:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \geq 4x + 4 \quad \text{și} \quad y^2 \leq -2x + 4\}$$

$$a(D) = \int_{-2}^2 \left(\int_{\frac{4-y^2}{2}}^{\frac{y^2-4}{4}} dx \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^2 (3y^2 - 12) dy = -8,$$

$$\iint_D x dx dy = \int_{-2}^2 \int_{\frac{4-y^2}{2}}^{\frac{y^2-4}{4}} x dx = \frac{1}{16} \int_0^2 (-3y^4 + 24y^2 - 48) dy = -\frac{16}{5}$$

$$\iint_D y dx dy = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 (3y^3 - 12y) dy = 0$$

Deci $x_G = \frac{2}{5}$, iar $y_G = 0$.

2. Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele de coordonate ale plăcii omogene ($\rho = 1$) mărginite de curbele $y = x^2$ și $x = y^2$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \quad \text{și} \quad y^2 \leq x\}.$$

Avem

$$I_x = \iint_D y^2 dx dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y^2 dy \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (x\sqrt{x} - x^6) dx = \frac{3}{35},$$

$$I_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_0^1 \left(x^2 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right) dx = \int_0^1 (x^2\sqrt{x} - x^4) dx = \frac{3}{35}.$$

Capitolul 10

Integrale de suprafață

10.1 Pânze parametrizate. Suprafețe

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu plan și $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ o funcție de clasă $C^1(D)$, $r(u, v) = (x, y, z)$, unde

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in D. \quad (10.1)$$

Definiția 10.1.1 Perechea $(r, D) \stackrel{\text{not}}{=} r$ se numește pânză parametrizată în \mathbb{R}^3 . Mulțimea $\text{Im}(r) = r(D)$ se numește imaginea sau urma pânzei.

Funcția $\bar{r} = \bar{r}(u, v) = f(u, v)\bar{i} + g(u, v)\bar{j} + h(u, v)\bar{j}$, $(u, v) \in D$ se numește reprezentarea vectorială a pânzei. Ecuațiile (10.1) se numesc ecuațiile parametrice ale pânzei.

Definiția 10.1.2 Două pânze parametrizate (r, D) și (r_1, D_1) se numesc pânze parametrizate echivalente dacă există un difeomorfism $\Phi : D \rightarrow D_1$ astfel încât $r_1 \circ \Phi = r$.

Dacă pânzele (r, D) și (r_1, D_1) sunt echivalente vom nota $r \sim r_1$.

Teorema 10.1.1 Două pânze parametrizate echivalente au același urmă.

DEMONSTRAȚIE. Fie $r \sim r_1$ și $\Phi : D \rightarrow D_1$ un difeomorfism astfel ca $r_1 \circ \Phi = r$. Deoarece Φ este bijecție, obținem $r(D) = r_1(D_1)$.

Observația 10.1.1.1 Dacă două pânze parametrizate au aceeași urmă, nu rezultă că ele sunt echivalente.

Teorema 10.1.2 Relația " \sim " este o relație de echivalență pe mulțimea pânzelor parametrizate.

DEMONSTRAȚIE. Se arată la fel ca și la drumuri.

Observația 10.1.2 Relația de echivalență " \sim " împarte mulțimea tuturor pânzelor parametrizate în clase de echivalență disjuncte. Două pânze parametrizate sunt echivalente dacă și numai dacă aparțin aceleiași clase.

Definiția 10.1.3 Se numește suprafață o clasă de echivalență de pânze parametrizate.

Pânza (r, D) din această clasă se numește parametrizare locală a suprafeței și o vom nota $S = (r, D)$.

Definiția 10.1.4 Suprafața S se numește suprafața simplă dacă există o parametrizare locală $S = (r, D)$ injectivă.

Mulțimea

$$S = \{(x, y, z) \mid z = z(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2\} \quad (10.2)$$

este o suprafață simplă deoarece $S = r(D)$, unde $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ $r(u, v) = (u, v, z(u, v))$ este o pânză parametrizată ($x = u, y = v$). Astfel (10.2) reprezintă forma explicită a suprafeței S , iar ecuația $z = f(x, y), (x, y) \in D$ se numește ecuația carteziană explicită a suprafeței S .

Mulțimea $S = \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3\}$, unde $F \in C^1(D)$, iar $F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2 \neq 0$ reprezintă o suprafață simplă. Ecuația $F(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in D$ se numește ecuația carteziană implicită a suprafeței S .

Fie S o suprafață de parametrizare locală $S = (r, D), r$ dată de (10.1). Dacă în (10.1) fixăm valoarea parametrului $u, u = u_0$, atunci se obțin ecuațiile unei curbe în spațiu $x = f(u_0, v), y = g(u_0, v), z = h(u_0, v)$, ale cărei puncte se află pe suprafața S . Dacă u_0 ia diferite valori, atunci se obține pe suprafața S o familie de curbe. Similar, dacă în (10.1) fixăm valoarea parametrului $v, v = v_0$, atunci se obțin ecuațiile unei curbe în spațiu $x = f(u, v_0), y = g(u, v_0), z = h(u, v_0)$ pe suprafața S . Dacă v_0 ia diferite valori, atunci se obține pe suprafața S o familie de curbe. Aceste curbe care se obțin pe suprafața S se numesc curbe coordonate pe suprafața S sau curbele rețelei lui Gauss.

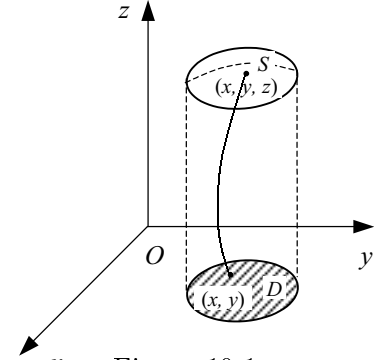


Figura 10.1:

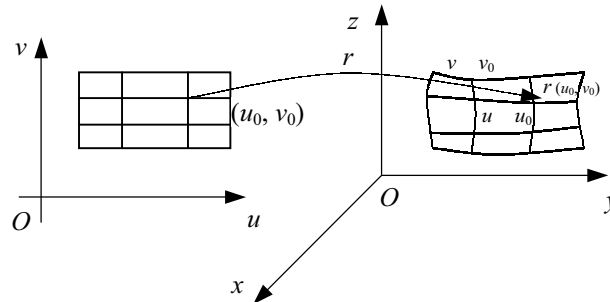


Figura 10.2:

Prin fiecare punct $M \in S$ ce aparține porțiunii simple a suprafeței S trece o curbă și numai una din fiecare familie de curbe coordonate ($u = u_k, v = v_k$) și anume curbele $u = u_0$ și $v = v_0$; u_0, v_0 se numesc coordonate curbilinii ale punctului M corespunzător punctului $(u_0, v_0) \in D$.

Fie S o suprafață și $M \in S$. Un vector \bar{h} aplicat în M , $\bar{h} \in \mathcal{V}_3(M)$ se numește vector tangent la S în punctul M dacă există un drum de clasă C^1 ($I, d = d(t)$) situat pe S și un punct $t_0 \in I$ astfel încât $d(t_0) = M$ și $d'(t_0) = \bar{h}$, deci \bar{h} este vector viteză la un drum ce trece prin M și este situat pe S .

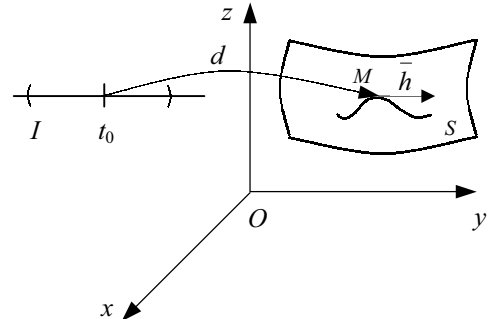


Figura 10.3:

Dacă S este o suprafață de parametrizare locală $S = (r, D)$ și $(u_0, v_0) \in D$, atunci vectorul viteză în u_0 la curba de coordonate $v = v_0$ se notează $\bar{r}_u(u_0, v_0)$, iar vectorul viteză în v_0 la curba de coordonate $u = u_0$ se notează $\bar{r}_v(u_0, v_0)$. Vectorii $\bar{r}_u(u_0, v_0), \bar{r}_v(u_0, v_0)$ se numesc viteze parțiale ale lui r în (u_0, v_0) . Astfel funcțiile $\bar{r}_u : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \bar{r}_v : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ în fiecare punct $(u_0, v_0) \in D$ sunt vectori tangenți la S în $r(u_0, v_0)$.

O suprafață S dată parametric prin (10.1) se numește netedă dacă $\|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\| \neq 0$ pentru orice $(u, v) \in D$.

Dacă suprafața simplă și netedă S este dată de parametrizarea (10.1), atunci vectorii tangenți în punctul $M(r(u_0, v_0))$, $\bar{r}_u(u_0, v_0)$ și $\bar{r}_v(u_0, v_0)$ sunt dați de $\bar{r}_u(u_0, v_0) = (f'_u(u_0, v_0), g'_u(u_0, v_0), h'_u(u_0, v_0))$, $\bar{r}_v(u_0, v_0) = (f'_v(u_0, v_0), g'_v(u_0, v_0), h'_v(u_0, v_0))$.

Cosinusurile directoare ale vectorilor \bar{r}_u, \bar{r}_v în punctul $M(r(u_0, v_0))$ sunt

$$\frac{f'_u(u_0, v_0)}{\pm\sqrt{E}}, \quad \frac{g'_u(u_0, v_0)}{\pm\sqrt{E}}, \quad \frac{h'_u(u_0, v_0)}{\pm\sqrt{E}},$$

respectiv

$$\frac{f'_v(u_0, v_0)}{\pm\sqrt{G}}, \quad \frac{g'_v(u_0, v_0)}{\pm\sqrt{G}}, \quad \frac{h'_v(u_0, v_0)}{\pm\sqrt{G}},$$

unde

$$\begin{aligned} E &= f_u'^2(u_0, v_0) + g_u'^2(u_0, v_0) + h_u'^2(u_0, v_0), \\ G &= f_v'^2(u_0, v_0) + g_v'^2(u_0, v_0) + h_v'^2(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Alegerea semnului din fața radicalului corespunde alegerii unui sens de tangentă.

Unghiul dintre două curbe se definește ca fiind unghiul dintre tangentele la aceste curbe. Dacă θ este unghiul dintre curbele $u = u_0$ și $v = v_0$, atunci

$$\cos \theta = \frac{(\bar{r}_u, \bar{r}_v)}{\|\bar{r}_u\| \|\bar{r}_v\|} = \pm \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

unde

$$(\bar{r}_u, \bar{r}_v) \stackrel{not}{=} F = f'_u(u_0, v_0)f'_v(u_0, v_0) + g'_u(u_0, v_0)g'_v(u_0, v_0) + h'_u(u_0, v_0)h'_v(u_0, v_0).$$

Expresiile E, F, G se numesc coeficienții Gauss ai suprafeței.

Normala la planul tangent la suprafața S în punctul M se numește normala la suprafața M .

Dacă α, β, γ sunt sinusurile directoare ale normalei \bar{n} la suprafața S în punctul $\bar{r}(u_0, v_0)$ atunci $\bar{n} \perp \bar{r}_u$ și $\bar{n} \perp \bar{r}_v$, așadar avem

$$\begin{cases} \alpha f'_u + \beta g'_u + \gamma h'_u = 0 \\ \alpha f'_v + \beta g'_v + \gamma h'_v = 0 \end{cases}$$

Întrucât, rangul matricii $\begin{pmatrix} f'_u & g'_u & h'_u \\ f'_v & g'_v & h'_v \end{pmatrix}$ este doi, atunci $\alpha = \lambda A, \beta = \lambda B, \gamma = \lambda C$, unde

$$A = \frac{D(g, h)}{D(u, v)}, \quad B = \frac{D(h, f)}{D(u, v)}, \quad C = \frac{D(f, g)}{D(u, v)}.$$

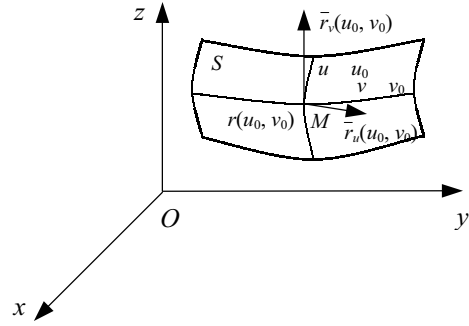


Figura 10.4:

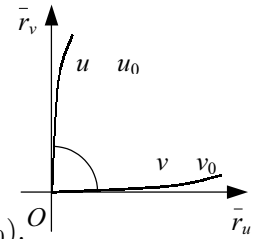


Figura 10.5:

Cum $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, rezultă

$$\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Se arată folosind identitatea lui Lagrange

$$(bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 + (ab' - a'b)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2$$

că

$$\|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{EG - F^2} \quad (10.3)$$

10.2 Aria unei suprafețe

Considerăm suprafața simplă și netedă care nu este închisă S definită de parametrizarea $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$, $(u, v) \in D$, unde D este un domeniu compact, $D \subseteq [a, b] \times [c, d]$.

Fie $\Delta = (\delta_1, \delta_1, \dots, \delta_p)$ o diviziune a domeniului D . Dreptelor $u = u_i$, $v = v_j$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, ce alcătuiesc diviziunea Δ , le corespund pe suprafața S o rețea de curbe de coordonate care determină o diviziune $\bar{\Delta} = (s_1, s_2, \dots, s_p)$ suprafeței S . Are loc și reciproca, unei diviziuni $\bar{\Delta}$ a suprafeței S alcătuită dintr-o rețea de curbe de coordonate îi corespunde pe domeniul D o diviziune Δ formată din paralele la axele de coordonate Ou și Ov .

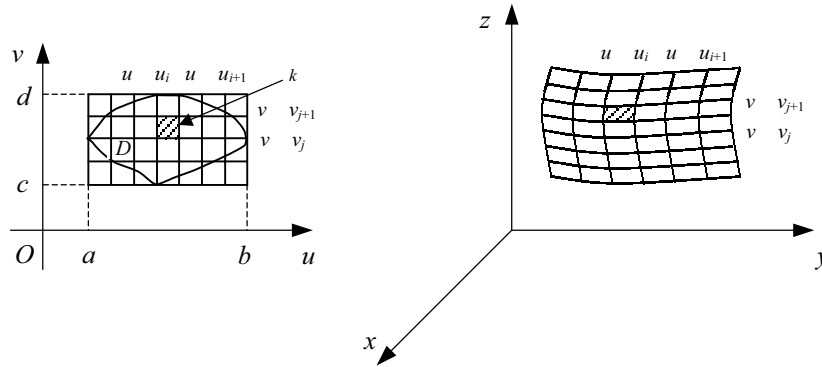


Figura 10.6:

Pentru fiecare parte de suprafață s_k a diviziunii Δ a suprafeței S se consideră cea mai mică sferă ce conține s_k . Fie d_k diametrul acestei sfere și definim norma diviziunii Δ ca fiind $\nu(\Delta) = \max_{k=\overline{1, p}}(d_k)$.

Fie $\delta_k \in \Delta$, $\delta_k = [u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$. Dreptunghiului δ_k îi corepunde pe suprafața S partea de suprafață s_k mărginită de curbele parametrice $u = u_i$, $u = u_{i+1}$, $v = v_j$, $v = v_{j+1}$.

În planul tangent la suprafață în punctul $M(r(u_i, v_j)) \in S$ se consideră paralelogramul având unul dintre vârfuri în punctul M , laturile dirijate după vectorii $\bar{r}_u(u_i, v_j)$, $\bar{r}_v(u_i, v_j)$ de lungimi $\|\bar{r}_u(u_i, v_j)\|(u_{i+1} - u_i)$, $\|\bar{r}_v(u_i, v_j)\|(v_{j+1} - v_j)$. Aria părții de suprafață se aproximează prin aria σ_k a acestui paralelogram.

$$\sigma_k = \|\bar{r}_u(u_i, v_j)\|(u_{i+1} - u_i)\|\bar{r}_v(u_i, v_j)\|(v_{j+1} - v_j) \sin \theta,$$

unde θ este unghiul format de curbele de coordonate $u = u_i$ și $v = v_j$.

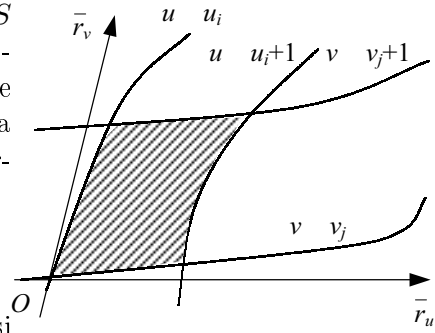


Figura 10.7:

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{F^2}{EG}} = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}},$$

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \sqrt{E} \Big|_{(u_i, v_j)} (u_{i+1} - u_i) \sqrt{G} \Big|_{(u_i, v_j)} (v_{j+1} - v_j) \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}} \Big|_{(u_i, v_j)} = \\ &= \sqrt{EG - F^2} \Big|_{(u_i, v_j)} (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j). \end{aligned}$$

Astfel, aria suprafeței S o vom aproxima prin suma

$$a(S) \simeq a_\Delta = \sum_{k=1}^p \sigma_k = \sum_{\delta_k} \sqrt{EG - F^2} \Big|_{(u_i, v_j)} (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j) \quad (10.4)$$

Fie $(\bar{\Delta}_n)$ un șir de diviziuni ale suprafeței S cu norma $\nu(\bar{\Delta}_n) \rightarrow 0$. Acestui șir de diviziuni îi corespunde un șir de diviziuni (Δ_n) al domeniului D cu $\nu(\Delta_n) \rightarrow 0$. Sumele a_{Δ_n} date de (10.4) reprezintă suma Riemann corespunzătoare funcției $\sqrt{EG - F^2}$, șirului de diviziuni (Δ_n) și punctelor $(u_i^n, v_j^n) \in \delta_k^n$. Întrucât, suprafața S este netedă, iar funcțiile f, g, h sunt de clasă $C^1(D)$, rezultă că funcția $\sqrt{EG - F^2}$ este continuă pe D .

Așadar, atunci când $\nu(\Delta'_n) \rightarrow 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\Delta_n} = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv$.

Definiția 10.2.1 *Suprafața simplă și netedă S are arie dacă există și este finită integrala $\iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv$. Numărul real $a(S) = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv$ reprezintă aria suprafeței S .*

Observația 10.2.1 1. Folosind egalitatea (10.3) avem

$$a(S) = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv = \iint_D \|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\| dudv.$$

2. Dacă suprafața S este dată prin ecuația carteziană explicită $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, iar $p = f'_x$ și $q' = f'_y$ (notațiile Monge), atunci $E = 1 + p^2$, $G = 1 + q^2$, $F = pq$ și

$$a(S) = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dudv.$$

3. Expresia $d\sigma = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv$ se numește element de arie în coordonate curbilinii.

4. Dacă suprafața simplă S este netedă pe porțiuni, atunci vom considera ca arie a ei suma ariilor diferitelor porțiuni.

Teorema 10.2.1 Aria unei suprafețe netede și simple nu depinde de reprezentarea parametrică a suprafeței.

DEMONSTRAȚIE. Presupunem că suprafața simplă și netedă S este dată de reprezentarea parametrică $x = f(u, v), y = g(u, v), z = h(u, v), (u, v) \in D$. Orice altă reprezentare parametrică a suprafeței S se obține printr-o transformare regulată a unui domeniu compact D' în domeniul compact D ,

$$u = \varphi(s, t), \quad v = \psi(s, t), \quad (s, t) \in D'. \quad (10.5)$$

Obținem prin transformarea regulată (10.5) următoarea reprezentare parametrică:

$$\begin{cases} x = f(\varphi(s, t), \psi(s, t)) = f_1(s, t) \\ y = g(\varphi(s, t), \psi(s, t)) = g_1(s, t) \\ z = h(\varphi(s, t), \psi(s, t)) = h_1(s, t). \end{cases}$$

Dacă notăm

$$A_1 = \frac{D(g_1, h_1)}{D(s, t)}, \quad B_1 = \frac{D(h_1, f_1)}{D(s, t)}, \quad C_1 = \frac{D(f_1, g_1)}{D(s, t)},$$

avem

$$A_1 = \frac{D(g, h)}{D(u, v)} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(s, t)}, \quad B_1 = \frac{D(h, f)}{D(u, v)} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(s, t)}, \quad C_1 = \frac{D(f, g)}{D(u, v)} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(s, t)},$$

deci

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} : \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(s, t)} \right|$$

Atunci

$$\begin{aligned} a(S) &= \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv = \\ &= \iint_{D'} \left(\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} : \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(s, t)} \right| \right) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(s, t)} \right| ds dt \\ &= \iint_{D'} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} ds dt \end{aligned} \quad (10.6)$$

În (10.6) am folosit formula de schimbare de variabilă de la integrala dublă.

Exemplu 10.2.1 Să se calculeze aria porțiunii din paraboloidul $x^2 + y^2 = 2z$, mărginită de planul $z = 2$; $pr_{xOy} S = D$, $D : x^2 + y^2 \leq 4$, $S : z = \frac{x^2 + y^2}{2}$, $(x, y) \in D$, $p = z'_x = x$, $q = z'_y = y$. Atunci

$$\begin{aligned} a(S) &= \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 r \sqrt{1 + r^2} dr \right) dt = \frac{2\pi}{3} (5\sqrt{5} - 1), \end{aligned}$$

unde $x = r \cos t, y = r \sin t$.

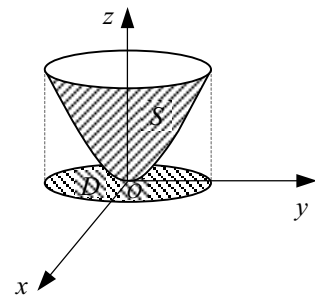


Figura 10.8:

10.3 Integrale de suprafață

Integralele de suprafață de primul tip constituie o generalizare a integralelor duble.

Fie S o suprafață netedă sau netedă pe porțiuni dată de reprezentarea

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in D \quad (10.7)$$

unde f, g, h sunt funcții definite și de clasă C^1 pe domeniul compact D din planul uOv .

Considerăm funcția F definită și mărginită pe un domeniu din \mathbb{R}^3 ce conține imaginea suprafeței S . Fie $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p)$ o diviziune a domeniului D căreia îi corespunde prin (10.7) o diviziune $\bar{\Delta} = (s_1, s_2, \dots, s_p)$ a suprafeței S .

Fie suma $\sigma_{\Delta}(F) = \sum_{k=1}^p F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) a(s_k)$, unde $\xi_k = f(u_k, v_k)$, $\eta_k = g(u_k, v_k)$, $\zeta_k = h(u_k, v_k)$, $(u_k, v_k) \in \delta_k$, $k = \overline{1, p}$, iar $a(s_k)$ reprezintă aria părții de suprafață s_k .

Definiția 10.3.1 *Funcția F este integrabilă pe suprafața netedă S dacă există un număr real I cu proprietate ca pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $\Delta \in \Delta^*$ cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ și pentru orice alegere a punctelor $(u_k, v_k) \in \delta_k$ să avem:*

$$|\sigma_{\Delta}(F) - I| < \varepsilon.$$

Numărul real I

$$I = \iint_S F(x, y, z) d\sigma \quad (10.8)$$

se numește integrala de suprafață a funcției F de primul tip sau în raport cu aria.

Observația 10.3.1 *Interpretarea fizică a integralei de suprafață de primul tip. Dacă S este o suprafață materială, iar $F(x, y, z)$ reprezintă densitatea suprafeței în punctul (x, y, z) , atunci, dacă există integrala (10.8), ea este masa suprafeței S . Dacă $F(x, y, z)$ reprezintă densitatea de repartiție a unei sarcini electrice, atunci dacă există integrala (10.8) ea este sarcina totală distribuită pe suprafața S .*

Teorema 10.3.1 *Fie S o suprafață netedă dată de (10.7) și funcția F definită și mărginită pe un domeniu din \mathbb{R}^3 ce conține imaginea suprafeței S . Dacă există integrala (10.8) și integrala*

$$\iint_D F(f(u, v), g(u, v), h(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv,$$

atunci

$$\iint_S F(x, y, z) d\sigma = \iint_D F(f(u, v), g(u, v), h(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv \quad (10.9)$$

DEMONSTRAȚIE. Suprafața S fiind netedă, conform definiției 10.2.1, avem

$$a(s_k) = \iint_{\delta_k} \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} du dv, \quad k = \overline{1, n}.$$

Aplicând teorema de medie de la integrala dublă, există un punct $(u_k, v_k) \in \delta_k$ astfel încât să avem:

$$a(s_k) = \sqrt{A^2(u_k, v_k) + B^2(u_k, v_k) + C^2(u_k, v_k)} a(\delta_k) \quad k = \overline{1, p}.$$

Deoarece $(u_k, v_k) \in \delta_k$, există un punct pe partea de suprafață s_k , $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in s_k$ cu $\xi_k = f(u_k, v_k)$, $\eta_k = g(u_k, v_k)$, $\zeta_k = h(u_k, v_k)$.

Obținem pentru suma Riemann asociată funcției F , diviziunii $\bar{\Delta}$ și punctelor intermediare (ξ_k, η_k, ζ_k) , $k = \bar{1}, p$ următoarea expresie

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{\Delta}}(F, \xi_k, \eta_k, \zeta_k) &= \sum_{k=1}^n F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) a(s_k) = \sum_{k=1}^p F(f(u_k, v_k), g(u_k, v_k), \\ &h(u_k, v_k)) \sqrt{A^2(u_k, v_k) + B^2(u_k, v_k) + C^2(u_k, v_k)} a(\delta_k) = \\ &= \sigma_{\Delta}(F \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, u_k, v_k)\end{aligned}\quad (10.10)$$

Ultima sumă obținută în (10.10) reprezintă suma Riemann asociată funcției F , diviziunii Δ și punctelor intermediare (u_k, v_k) . Astfel, dacă (Δ_n) este un șir de diviziuni ale domeniului Δ cu $\nu(\Delta_n) \rightarrow 0$, atunci șirul diviziunilor corespunzătoare $(\bar{\Delta}_n)$ ale suprafeței S va avea norma $\nu(\bar{\Delta}_n) \rightarrow 0$.

Trecând la limită în (10.10), rezultă egalitatea (10.9), care reprezintă formula de calcul a integralei de suprafață în raport cu aria.

Observația 10.3.2 1. În ipotezele teoremei 10.3.1

$$\iint_S F(x, y, z) d\sigma = \iint_D F(f(u, v), g(u, v), h(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

2. Dacă suprafața simplă și netedă S este dată de reprezentarea $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, atunci

$$\iint_S F(x, y, z) d\sigma = \iint_D F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy. \quad (10.11)$$

3. Aria unei suprafețe S este

$$a(S) = \iint_S d\sigma$$

4. Dacă există integrala $\iint_S F(x, y, z) d\sigma$, ea este independentă de reprezentarea parametrică a suprafeței S .

5. Proprietatea de aditivitate a integralei de suprafață de primul tip ca funcție de domeniu.

Dacă suprafața simplă S este netedă pe porțiuni, $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$, atunci

$$\iint_S F(x, y, z) d\sigma = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} F(x, y, z) d\sigma.$$

Exemplu 10.3.1 1. Să se calculeze integrala $I = \iint_S (x + y + z) d\sigma$, unde suprafața S este semisfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$.

Pentru suprafața S avem reprezentarea parametrică $x = a \cos \theta \cos \varphi$, $y = a \sin \theta \cos \varphi$, $z = a \sin \varphi$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $d\sigma = a^2 \cos \varphi d\theta d\varphi$. Obținem

$$\begin{aligned}I &= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\pi} (\cos \theta \cos^2 \varphi + \sin \theta \sin^2 \varphi + \cos \varphi \sin \varphi) d\theta \right] d\varphi = \\ &= \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = \pi a^3\end{aligned}$$

2. Să se calculeze integrala $I = \iint_S z d\sigma$, unde suprafața S este porțiunea din paraboloidul $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, decupată de cilindrul $x^2 + y^2 = 8$; $pr_{xOy}S = D$, $D : x^2 + y^2 \leq 8$, $S : z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $(x, y) \in D$. Conform relației (10.11) avem

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} r^3 \sqrt{1 + r^2} dt \right) dr \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} r^2 (1 + r^2)^{3/2} \Big|_0^{2\sqrt{2}} - \frac{2}{15} (1 + r^2)^{5/2} \Big|_0^{2\sqrt{2}} \right] = \frac{596\pi}{15}. \end{aligned}$$

10.4 Integrale de suprafață în raport cu coordonatele

Definiția 10.4.1 Mulțimea $T_a S$ a tuturor vectorilor tangenți la S în a se numește spațiul tangent la S în a .

Definiția 10.4.2 Se numește orientare a unei suprafețe S alegerea unei orientări în fiecare spațiu $T_a S$, $a \in S$, adică alegerea a câte unui versor normal $\bar{n}(a)$, $\bar{n}(a) \perp T_a S$ astfel încât aplicația $c : S \rightarrow V_3$, $c(a) = \varepsilon_a \bar{n}(a)$ să fie continuă, cu $\varepsilon_a = \pm 1$.

O suprafață S care admite orientare se numește orientabilă sau cu două fețe.

Dacă orientarea este fixată, atunci suprafața S se numește orientată.

Dacă suprafața S este convexă, atunci cum funcția $\bar{c} : S \rightarrow \{\pm 1\}$ $\bar{c}(a) = \varepsilon_a$ este continuă rezultă că ea este constantă, adică fie $\varepsilon_a = 1$ pentru orice $a \in S$ și atunci funcția c definește orientarea pozitivă $c(a) = \bar{n}(a)$, fie $\varepsilon_a = -1$, pentru orice $a \in S$ și atunci funcția c definește orientarea negativă $c(a) = -\bar{n}(a)$.

Integrala de suprafață de tipul al doilea se construiește în mod asemănător ca și integrala curbilinie de tipul al doilea.

Fie suprafața simplă și netedă dată de reprezentarea (10.7). În fiecare punct $M(x, y, z)$ al suprafeței S putem considera doi vectori normali la suprafață \bar{n}_i, \bar{n}_s de sensuri opuse.

Definiția 10.4.3 Se numește fața superioară (inferioară) a suprafeței S relativ la planul xOy acea față a suprafeței pentru care vectorul normal face un unghi ascuțit (obtuz) cu axa Oz .

În cazul unei sfere fața superioară are ca vector normal, vectorul normal exterior la sferă. Fața inferioară are ca vector normal, vectorul normal interior la sferă.

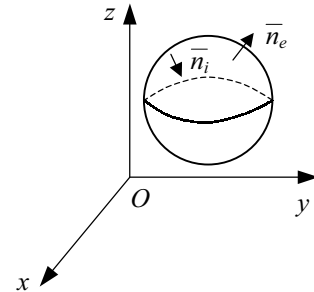


Figura 10.9:

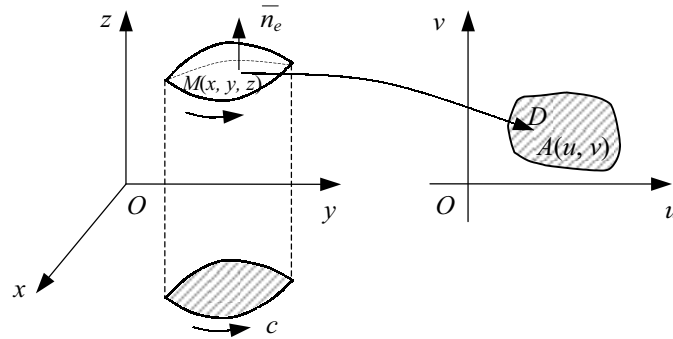


Figura 10.10:

Fie $\Delta = \text{pr}_{xOy}S$, Γ conturul suprafeței S , $C = \text{pr}_{xOy}\Gamma$.

Pe conturul Γ se pot defini două sensuri. Sensul asociat feței superioare este cel care corespunde sensului direct pe C . Sensul asociat feței inferioare este cel care corespunde sensului invers pe C . Vom spune că suprafața S este orientată față de planul xOy , de asemenea, fiind orientate atât domeniul Δ cât și domeniul D .

Se observă că o suprafață S este orientată, dacă prin deplasarea continuă a unui punct de pe Γ revenim în punctul inițial cu aceeași orientare pentru normala la S . În caz contrar suprafața S nu este orientată. Un exemplu de suprafață care nu este orientată îl reprezintă banda lui Möbius care se obține prin îndoirea unei foi dreptunghiulare $ABCD$ astfel încât vârful A coincide cu C , iar vârful B coincide cu D . Însă o porțiune a acestuia poate fi orientabilă.

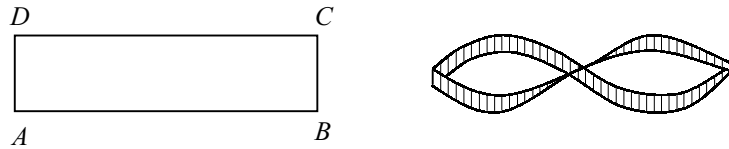


Figura 10.11:

Procedeul folosit pentru orientarea suprafeței S și de asociere acestei orientări orientarea domeniului Δ poate fi extins și la celelalte plane de coordonate.

Fie P, Q, R trei funcții definite și continue pe un domeniu $V \subset \mathbb{R}^3$, domeniu ce conține suprafața netedă și orientată S . Avem

$$\bar{n} = \pm \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{\|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\|} = \pm(\alpha\bar{i} + \beta\bar{j} + \gamma\bar{k}),$$

unde α, β și γ reprezintă cosinusurile unghiurilor pe care le face normala la suprafața orientată S cu axele de coordonate.

Definiția 10.4.4 Integrala de suprafață a funcției $\bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ sau integrala de suprafață de speța a doua se notează

$$\iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \quad (10.12)$$

și se definește prin egalitatea

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy = \\ = \iint_S (P(x, y, z)\alpha + Q(x, y, z)\beta dx + R(x, y, z)\gamma) d\sigma \end{aligned} \quad (10.13)$$

Având în vedere regula de calcul a integralei de suprafață de speța întâi și faptul că

$$\bar{n} = \pm \left(\frac{D(g, h)}{D(u, v)} \bar{i} + \frac{D(h, f)}{D(u, v)} \bar{j} + \frac{D(f, g)}{D(u, v)} \bar{k} \right) \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}$$

obținem

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy = \\ = \pm \iint_S \left[P(x, y, z) \frac{D(g, h)}{D(u, v)} + Q(x, y, z) \frac{D(h, f)}{D(u, v)} + R(x, y, z) \frac{D(f, g)}{D(u, v)} \right] dudv \end{aligned} \quad (10.14)$$

cu semnul ” + ” dacă domeniul D are aceeași orientare cu domeniul Δ și cu semnul ” – ” dacă domeniul D are orientare inversă față de domeniul Δ .

Observația 10.4.1 1. Dacă $\bar{V}(x, y, z) = O(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$, $(x, y, z) \in V \subset \mathbb{R}^3$, iar domeniul V conține suprafața S , atunci integrala de suprafață de speța a doua se poate scrie ca

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy = \\ = \iint_S (\bar{F}, \bar{n}) d\sigma = \iint_D (\bar{V}, \bar{r}_u, \bar{r}_v) dudv, \end{aligned} \quad (10.15)$$

unde produsul mixt este

$$(\bar{v}, \bar{r}_u, \bar{r}_v) = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}$$

2. Dacă suprafața S este netedă pe porțiuni, $S = \bigcup_{k=1}^n S_k$, unde S_k sunt suprafețe netede $k = \overline{1, n}$, atunci integrala de suprafață (10.12) se calculează prin

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy = \\ = \sum_{k=1}^n \iint_{S_k} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy. \end{aligned}$$

3. Presupunem că $\bar{V}(x, y, z) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$, $(x, y, z) \in V \subset \mathbb{R}^3$ este câmpul vectorial al vitezelor particulelor de fluid ale unui fluid în mișcare având masa specifică egală cu unitatea. Cantitatea de fluid care trece prin elementul de suprafață $d\sigma$ al suprafeței orientate $S \subset V$ în unitatea de timp este produsul $(\bar{V}, \bar{n})d\sigma$ și se numește fluxul elementar al câmpului de viteze \bar{V} prin elementul $d\sigma$. Integrala de suprafață $\iint_S (\bar{V}, \bar{n})d\sigma$ reprezintă fluxul total al câmpului de viteze \bar{V} prin suprafața orientată S .

Exemplu 10.4.1 1. Să se calculeze integrala de speța a doua $I = \iint_S xdydz + ydxdz + zdx dy$, unde S este fața exterioară a sferei $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$.

Versorul normalei \bar{n} al feței exterioare este $\bar{n} = \frac{\text{grad} \varphi}{\|\text{grad} \varphi\|} = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right)$. Cu ajutorul formulei (10.13) integrala I devine

$$I = \iint_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} d\sigma = a \iint_S d\sigma = 4\pi a^3.$$

2. Să se calculeze integrala de speța a doua $I = \iint_S (y-z)dydz + (z-x)dxdz + (x-y)dx dy$, unde S este fața exterioară închisă a conului $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq h$.

$S = S_1 \cup S_2$, unde S_1 este secțiunea suprafeței S cu planul $z = h$,

iar S_2 este fața laterală a conului; $I = I_1 + I_2$, unde $I_1 = \iint_{S_1} (y-z)dydz + (z-x)dxdz + (x-y)dx dy$, iar $I_2 = \iint_{S_2} (y-z)dydz + (z-x)dxdz + (x-y)dx dy$.

Versorul normalei \bar{n}_1 al feței exterioare a suprafeței S_1 este $\bar{n}_1 = (0, 0, 1)$. Conform relației (10.13) I_1 devine $I_1 = \iint_{S_1} (x-y)d\sigma = \iint_D (x-y)dx dy$, unde $D = \text{pr}_{xOy} S_1$, $D : x^2 + y^2 \leq h^2$.

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^h r^2 (\cos t - \sin t) dr \right) dt = 0, \text{ unde } x = r \cos t, y = r \sin t, r \in [0, h], t \in [0, 2\pi].$$

Versorul normalei \bar{n}_2 al feței exterioare a suprafeței S_2 este $\bar{n}_2 = -\frac{\text{grad} \varphi}{\|\text{grad} \varphi\|}$, unde $\varphi(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$, iar unghiul pe care \bar{n}_2 îl face cu axa Oz este obtuz; $\bar{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right)$. Conform relației (10.13) I_2 devine

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{S_2} \left[\frac{x(y-z) + y(z-x)}{\sqrt{x^2 + y^2}} - (x-y) \right] d\sigma = \sqrt{2} \iint_{S_2} (y-x) d\sigma = \\ &= 2 \iint_D (y-x) dx dy = 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^h r^2 (\sin t - \cos t) dr \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Așadar $I = 0$.

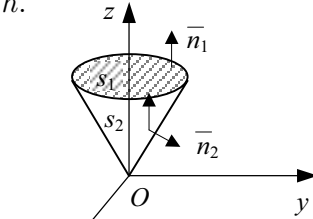


Figura 10.12:

10.5 Formula lui Stokes

Legătura dintre integrala curbilinie în spațiu și integrala de suprafață este stabilită prin formula lui Stokes, care constituie generalizarea formulei lui Green.

Fie S o suprafață orientată, netedă și simplă dată prin reprezentarea vectorială

$$\bar{r}(u, v) = f(u, v)\bar{i} + g(u, v)\bar{j} + h(u, v)\bar{k}, \quad (u, v) \in D,$$

unde D este un domeniu compact ce are arie, iar $f, g, h \in C^2(D)$. Fie C curba ce mărginește suprafața S , curbă închisă și netedă. Pe curba C se definește o orientare compatibilă cu orientarea pe suprafața S , în sensul că se alege fața suprafeței S astfel ca un observator situat pe această față să vadă conturul C parcurs în sens direct.

Teorema 10.5.1 *Fie suprafața S și curba C care satisfac condițiile de mai sus. Dacă P, Q și R sunt trei funcții definite și de clasă $C^1(V)$, unde domeniul $V \subset \mathbb{R}^3$ conține suprafața S , atunci are loc egalitatea*

$$\oint_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \iint_S (R'_y - Q'_z)dydz + \\ + (P'_z - R'_x)dzdx + (Q'_x - P'_y)dxdy$$

numită formula integrală a lui Stokes.

DEMONSTRAȚIE: Fie Γ curba ce mărginește domeniul D .

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y, z)dx &= \int_{\Gamma} P(f(u, v), g(u, v), h(u, v))(f'_u du + f'_v dv) = \\ &= \int_{\Gamma} P(f(u, v), g(u, v), h(u, v))f'_v(dv) + \\ &\quad + P(f(u, v), g(u, v), h(u, v))f'_u du \end{aligned} \quad (10.16)$$

Aplicăm formula lui Green membrului drept al egalității (10.16)

$$\int_C P(x, y, z)dx = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u}(Pf'_v) - \frac{\partial}{\partial v}(Pf'_u) \right] dudv \quad (10.17)$$

Avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}(Pf'_v) - \frac{\partial}{\partial v}(Pf'_u) &= P'_x f'_u f'_v + P'_y g'_u f'_v + P'_z h'_u f'_v + P f''_{vu} - P'_x f'_v f'_u - \\ &\quad - P'_y g'_v f'_u - P'_z h'_v f'_u - P f''_{uv} = P'_z (h'_u f'_v - h'_v f'_u) - \\ &\quad - P'_y (f'_u g'_v - g'_u f'_v) = P'_z B - P'_y C \end{aligned} \quad (10.18)$$

Cu relația (10.18), (10.17) devine

$$\int_C P(x, y, z)dx = \iint_D (P'_z B - P'_y C) dudv = \iint_S P'_z dzdx - P'_y dxdy \quad (10.19)$$

Analog obținem încă două relații și anume

$$\int_C Q(x, y, z)dy = \iint_S Q'_x dxdy - Q'_z dydz \quad (10.20)$$

$$\int_C R(z, y, z)dz = \iint_S R'_y dydz - R'_z dzdx \quad (10.21)$$

Adunând egalitățile (10.19), (10.20) și (10.21) obținem

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S (R'_y - Q'_z)dydz + (P'_z - R'_x)dzdx + (Q'_x - P'_y)dxdy \quad (10.22)$$

Observația 10.5.1 1. Formula lui Green rezultă din formula integrală a lui Stokes dacă C și $S \subset \mathbb{R}^2$, adică $z = 0$ și $dz = 0$. Atunci înlocuind în (10.22) $dz = 0$ avem

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_S (Q'_x - P'_y)dxdy.$$

2. Dacă α, β, γ sunt cosinusurile directe ale normalei \bar{n} la suprafața orientată S formula (10.22) devine

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint [(R'_y - Q'_z)\alpha + (P'_z - R'_x)\beta + (Q'_x - P'_y)\gamma] d\sigma.$$

Exemplu 10.5.1 Cu ajutorul formulei lui Stokes să se calculeze următoarea integrală curbilinie

$$I = \oint_C ydx + zdy + xdz, \text{ unde curba } C \text{ este dată prin } C : \begin{cases} x = a \cos^2 t \\ y = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin 2t \\ z = a \sin^2 t \end{cases} . \text{ Se observă că}$$

$C : x + z = a$ și $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ și luăm suprafața S ca fiind porțiunea din planul $x + z = a$ decupată de cercul $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ și versorul normalei la S $\bar{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Conform formulei (10.22) integrala I devine

$$I = - \iint_S \sqrt{2} d\sigma = -2 \iint_D dx dy = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} a^2,$$

unde $D = pr_{xOy} int C$, $D : 2x^2 + y^2 - 2ax \leq 0$.

Capitolul 11

Integrala triplă

11.1 Mulțimi din spațiu măsurabile Jordan

Se numește poliedru o figură mărginită de fețe plane. Măsura mulțimii de puncte interioare unei suprafețe poliedrale S este volumul poliedrului mărginit de S .

Clasa poliedrelor este un clan. Fiecărui poliedru $P \in \mathcal{P}$ i se atașează un număr real pozitiv $v(P)$, volumul său.

Funcția reală $v : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ are următoarele proprietăți:

1. $v(P) \geq 0, \forall P \in \mathcal{P}$
2. $v(P \cup Q) = v(P) + v(Q)$, dacă $P \cap Q = \emptyset$;
3. $v(Q - P) = v(Q) - v(P)$, dacă $P \subset Q$;
4. $v(P) \leq v(Q)$, dacă $P \subset Q$;
5. $v(P \cup Q) \leq v(P) + v(Q)$.

Fie A o mulțime mărginită din \mathbb{R}^3 . Există întotdeauna două poliedre P și Q numite poliedru interior, respectiv exterior astfel încât $P \subset A \subset Q$. Oricare ar fi poliedrul interior P și poliedrul exterior Q avem $v(P) \leq v(Q)$.

Notăm $v_i(A) = \sup_{P \subset A} v(P)$ și $v_e(A) = \inf_{A \subset Q} v(Q)$.

Numerele $v_i(A)$ și $v_e(A)$ se numesc volumul interior, respectiv volumul exterior în sensul Jordan al lui A și avem $v(P) \leq v_i(A) \leq v_e(A) \leq v(Q), \forall P$ și Q astfel încât $P \subset A \subset Q$.

Definiția 11.1.1 Vom spune că mulțimea mărginită din \mathbb{R}^3 are volum sau este măsurabilă Jordan dacă $v_i(A) = v_e(A)$. Dacă mulțimea A are volum, atunci valoarea comună a volumului interior și a celui exterior se numește volumul mulțimii A și se notează $v(A)$, $v(A) = v_i(A) = v_e(A)$.

Observația 11.1.1 Dacă mulțimea A este măsurabilă în sens Jordan, atunci $\forall P, Q \in \mathcal{P}$ $P \subset A \subset Q$ avem $v(P) \leq v(A) \leq v(Q)$, deci $v(A) \geq 0$.

Criterii de măsurabilitate

Teorema 11.1.1 O mulțime A din spațiu are volum dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un poliedru interior $P_\varepsilon \subset A$ și un poliedru exterior $A \subset Q_\varepsilon$ astfel ca $v(Q_\varepsilon) - v(P_\varepsilon) < \varepsilon$.

Teorema 11.1.2 *O mulțime A din spațiu are volum dacă și numai dacă există un șir de poliedre interioare (P_n) și unul de poliedre exterioare (Q_n) astfel încât șirurile volumelor $(v(P_n))$, respectiv $(v(Q_n))$ au aceeași limită,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(Q_n) = v(A).$$

Demonstrațiile teoremelor 11.1.1 și 11.1.2 sunt similare cu cele ale teoremelor 9.1.1 și 9.1.2.

11.2 Integrala triplă

Integrala triplă este o extindere a integralei Riemann la un domeniu compact $V \subset \mathbb{R}^3$ mărginit de o suprafață netedă pe porțiuni.

Fie funcția f definită și mărginită pe domeniul compact V , $V \subseteq [a, b] \times [c, d] \times [e, g] = I$. Considerăm

$$\begin{aligned} \delta &: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \\ \bar{\delta} &: c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d \\ \delta^* &: e = z_0 < z_1 < \dots < z_q = g \end{aligned} \quad (11.1)$$

diviziuni ale intervalelor $[a, b]$, $[c, d]$, respectiv $[e, g]$.

Planele duse prin punctele diviziunilor $\delta, \bar{\delta}, \delta^*$ paralele cu planele yOz, zOx , respectiv xOy împart paralelipipedul I în $m n q$ paralelipipe notate $\delta_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, m-1}$, $k = \overline{0, q-1}$. Notăm $\mathcal{D} = \{\delta_{ijk} \mid \delta_{ijk} \subset V \text{ sau } \delta_{ijk} \text{ are puncte atât din } V \text{ cât și din } I - V, i = \overline{0, n-1}, j = \overline{0, m-1}, k = \overline{0, q-1}\}$.

Definiția 11.2.1 *Se numește diviziune a domeniului compact V mulțimea paralelipipedelor δ_{ijk} din \mathcal{D} . După o renumerotare vom nota $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p)$ diviziune a lui V .*

Numărul real pozitiv

$$\nu(\Delta) = \max_{\substack{i=\overline{0, n-1} \\ j=\overline{0, m-1} \\ k=\overline{0, q-1}}} (x_{i+1} - x_i, y_{j+1} - y_j, z_{k+1} - z_k) \leq \max(\nu(\delta), \nu(\bar{\delta}), \nu(\delta^*))$$

se numește norma diviziunii Δ .

Fie diviziunile $\delta', \bar{\delta}', \delta^{*'}$ ale intervalelor $[a, b]$, $[c, d]$ respectiv $[e, g]$ și Δ' diviziunea corespunzătoare a domeniului V . Dacă $\delta' \supset \delta$, $\bar{\delta}' \supset \bar{\delta}$, $\delta^{*'} \supset \delta^*$ atunci vom spune că diviziunea Δ' este mai fină decât Δ și vom nota $\Delta' \supset \Delta$, iar

$$\nu(\Delta') \leq \max(\nu(\delta'), \nu(\bar{\delta}'), \nu(\delta^{*'})) \leq \max(\nu(\delta), \nu(\bar{\delta}), \nu(\delta^*))$$

Dacă Δ și Δ' sunt diviziuni ale domeniului V și dacă $\nu(\Delta') \leq \nu(\Delta)$ nu rezultă că diviziunea Δ' este mai fină decât Δ .

Fie $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p)$ o diviziune a domeniului compact $V \subset \mathbb{R}^3$. Notăm $m_k = \inf_{(x,y,z) \in \delta_k} f(x, y, z)$, $M_k = \sup_{(x,y,z) \in \delta_k} f(x, y, z)$, $m = \inf_{(x,y,z) \in V} f(x, y, z)$, $M = \sup_{(x,y,z) \in V} f(x, y, z)$, $v_k = \text{volumul } \delta_k$ și $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \delta_k$, $k = \overline{1, p}$.

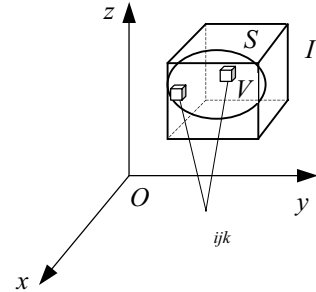


Figura 11.1:

Considerăm sumele $s_{\Delta}(f) = \sum_{k=1}^p m_k v_k$, $S_{\Delta}(f) = \sum_{k=1}^p M_k v_k$ și $\sigma_{\Delta}(f) = \sum_{k=1}^p f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) v_k$ numite suma Darboux inferioară, superioară, respectiv suma Riemann.

În continuare dăm câteva dintre proprietățile sumelor Darboux și Riemann, care se demonstrează în mod similar cu proprietățile sumelor Darboux și Riemann de la integrala dublă.

1. $mv \leq s_{\Delta}(f) \leq S_{\Delta}(f) \leq Mv$, unde prin v am notat volumul domeniului V , $\Delta \in \Delta^*$.
2. $s_{\Delta}(f) = \inf \sigma_{\Delta}(f, \xi_k, \eta_k, \zeta_k)$, $S_{\Delta}(f) = \sup \sigma_{\Delta}(f, \xi_k, \eta_k, \zeta_k)$, $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \delta_k$.
3. Dacă $\Delta, \Delta' \in \Delta^*$, $\Delta' \supset \Delta$ atunci $s_{\Delta}(f) \leq s_{\Delta'}(f) \leq S_{\Delta'}(f) \leq S_{\Delta}(f)$.
4. Pentru orice $\Delta, \Delta' \in \Delta^*$ avem $s_{\Delta}(f) \leq S_{\Delta'}(f)$.
5. Dacă $\Delta \in \Delta^*$, atunci $\sup_{\Delta \in \Delta^*} s_{\Delta}(f) \leq \inf_{\Delta \in \Delta^*} S_{\Delta}(f)$, și mulțimea $(s_{\Delta}(f))_{\Delta \in \Delta^*}$ este mărginită superior, iar mulțimea $(S_{\Delta}(f))_{\Delta \in \Delta^*}$ este mărginită inferior.
6. $s_{\Delta}(f) \leq \sigma_{\Delta}(f, \xi_k, \eta_k, \zeta_k) \leq S_{\Delta}(f)$, $\forall \Delta \in \Delta^*$ și pentru orice punct $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \delta_k$.

Definiția 11.2.2 Fie f o funcție definită și mărginită pe un domeniu compact $V \subset \mathbb{R}^3$. Funcția f este integrabilă Riemann pe V dacă există un număr real I cu proprietatea că $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ așa încât $\forall \Delta \in \Delta^*$ cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ și pentru orice alegere a punctelor intermediare $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \delta_k$ să avem

$$|\sigma_{\Delta}(f, \xi_k, \eta_k, \zeta_k) - I| < \varepsilon.$$

Numărul real I se numește integrala funcției f pe domeniul V sau integrala triplă a funcției f și se notează $I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$.

Definiția 11.2.3 Fie f o funcție definită și mărginită pe un domeniu compact $V \subset \mathbb{R}^3$. Funcția f este integrabilă Riemann pe V , dacă pentru orice șir de diviziuni (Δ_n) , $\Delta_n \in \Delta^*$ cu $\nu(\Delta_n) \rightarrow 0$ șirurile sumelor Darboux $(s_{\Delta_n}(f))$ și $(S_{\Delta_n}(f))$ au limită comună finită.

Observația 11.2.1 1. Dacă funcția f este integrabilă pe domeniul V , atunci $I = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{\Delta_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n}(f)$.

2. Dacă funcția f este integrabilă pe V și $f(x, y, z) \geq 0$, $(x, y, z) \in V$, atunci integrala I reprezintă masa unui corp de volum V , neomogen și de densitate $f(x, y, z)$.

3. Domeniul V se numește domeniu de integrare.

4. Expresia $dx dy dz$ se numește elementul de volum în coordonate carteziane.

Definiția 11.2.4 Fie f o funcție definită și mărginită pe un domeniu compact $V \subset \mathbb{R}^3$. Funcția f este integrabilă Riemann pe V dacă pentru orice șir de diviziuni (Δ_n) , $\Delta_n \in \Delta^*$ cu $\nu(\Delta_n) \rightarrow 0$ și pentru orice alegere a punctelor intermediare $(\xi_k^n, \eta_k^n, \zeta_k^n) \in \delta_k^n$, șirurile Riemann corespunzătoare $(\sigma_{\Delta_n}(f))$ au limită comună finită.

11.3 Criterii de integrabilitate

Teorema 11.3.1 *Criteriul lui Darboux*

Fie f o funcție definită și mărginită pe un domeniu compact $V \subset \mathbb{R}^3$. Funcția f este integrabilă pe V dacă și numai dacă pentru $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ așa încât $\forall \Delta \in \Delta^*$ cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ să avem $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$.

Teorema 11.3.2 Orice funcție f definită și continuă pe un domeniu compact $V \subset \mathbb{R}^3$ este integrabilă pe V .

Teorema 11.3.3 Fie f o funcție definită și mărginită pe un domeniu compact $V \subset \mathbb{R}^3$. Funcția f este integrabilă pe D dacă și numai dacă mulțimea punctelor de discontinuitate ale lui f este o suprafață netedă pe porțiuni.

DEMONSTRAȚIE: vezi [10]

Teoremele 11.3.1 și 11.3.2 se demonstrează la fel ca la integrala dublă.

Proprietăți ale integralelor triple

Demonstrația următoarelor proprietăți ale integralelor triple este similară cu cea a integralelor simple.

1. Proprietatea de linearitate a integralei duble.

Dacă funcțiile f și g sunt integrabile pe $V \subset \mathbb{R}^3$, atunci și funcțiile $f \pm g$ sunt integrabile pe V și

$$\begin{aligned} \iiint_V (f(x, y, z) \pm g(x, y, z)) dx dy dz &= \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \pm \\ &\pm \iiint_V g(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

2. Proprietatea de omogenitate a integralei triple.

Dacă funcția f este integrabilă pe V și $\lambda \in \mathbb{R}$, atunci și funcția λf este integrabilă pe V și

$$\iiint_V \lambda f(x, y, z) dx dy dz = \lambda \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz.$$

3. Proprietatea de aditivitate a integralei triple ca funcție de domeniu.

Dacă funcția f este integrabilă pe V , iar volumul V este neted pe porțiuni, $V = \bigcup_{k=1}^n V_k$, atunci funcția f este integrabilă pe V_k , $k = \overline{1, n}$ și

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{k=1}^n \iiint_{V_k} f(x, y, z) dx dy dz.$$

4. Dacă funcția f este integrabilă pe V și $f(x, y, z) \geq 0$, $\forall (x, y, z) \in V$, atunci

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \geq 0.$$

5. Proprietatea de monotonie a integralei triple.

Dacă funcțiile f și g sunt integrabile pe V și $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$, $\forall (x, y, z) \in V$, atunci

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \geq \iiint_V g(x, y, z) dx dy dz.$$

6. Dacă funcția f este integrabilă pe V , atunci și funcția $|f|$ este integrabilă pe V și

$$\left| \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \right| \leq \iiint_V |f(x, y, z)| dx dy dz.$$

7. Formula de medie pentru integrala triplă.

Dacă funcția f este continuă pe domeniul compact V , atunci există un punct $(\xi, \eta, \zeta) \in V$ așa încât să avem

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = f(\xi, \eta, \zeta)v,$$

unde v reprezintă volumul domeniului V .

8. Dacă funcția f este mărginită și integrabilă pe V , $m \leq f(x, y, z) \leq M$, $(x, y, z) \in V$, atunci există un număr $\mu \in [m, M]$ astfel încât să avem

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \mu v.$$

9.
$$\iiint_V dx dy dz = v.$$

11.4 Calculul integralei triple

1. Să presupunem că domeniul V este $I = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$.

Teorema 11.4.1 *Dacă f este o funcție definită, mărginită și integrabilă pe I așa încât $\forall (x, y) \in D = [a, b] \times [c, d]$ există integrala $F(x, y) = \int_e^g f(x, y, z) dz$, atunci există și integrala $\iint_D F(x, y) dx dy$ și are loc egalitatea*

$$\iiint_I f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_e^g f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

DEMONSTRAȚIE: Fie $\delta, \bar{\delta}, \delta^*$ diviziuni ale intervalelor $[a, b]$, $[c, d]$, respectiv $[e, g]$ date de (11.1) și $\delta_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$, $\delta_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, m-1}$, $k = \overline{0, q-1}$.

$\Delta = (\delta_{ijk} \mid i = \overline{0, n-1}, j = \overline{0, m-1}, k = \overline{0, q-1})$ este o diviziune a lui I , iar $\Delta' = (\delta_{ij} \mid i = \overline{0, n-1}, j = \overline{0, m-1})$ o diviziune a lui D . Notăm

$$m_{ijk} = \inf_{(x, y, z) \in \delta_{ijk}} f(x, y, z), \quad M_{ijk} = \sup_{(x, y, z) \in \delta_{ijk}} f(x, y, z).$$

Considerăm suma Riemann a funcției F corespunzătoare diviziunii Δ' și punctelor intermediare $(\xi_i, \eta_j) \in \delta_{ij}$

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta'}(F; \xi_i, \eta_j) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} F(\xi_i, \eta_j)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\int_e^g f(\xi_i, \eta_j, z) dz \right) (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{q-1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(\xi_i, \eta_j, z) dz (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)\end{aligned}\quad (11.2)$$

Aplicând funcției $f(\xi_i, \eta_j, z)$ formula de medie pentru integrala Riemann pe intervalul $[z_k, z_{k+1}]$, rezultă existența unui punct

$$m_{ijk} \leq \mu_{ijk} \leq M_{ijk} \quad (11.3)$$

astfel ca

$$\int_{z_k}^{z_{k+1}} f(\xi_i, \eta_j, z) dz = \mu_{ijk}(z_{k+1} - z_k).$$

Cu aceasta (11.2) devine

$$\sigma_{\Delta'}(F, \xi_i, \eta_j) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{q-1} \mu_{ijk}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k) \quad (11.4)$$

Din (11.3) și (11.4) obținem

$$\begin{aligned}& \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{q-1} m_{ijk}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k) \leq \sigma_{\Delta'}(F, \xi_i, \eta_j) \leq \\ & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{q-1} M_{ijk}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k),\end{aligned}$$

adică $s_{\Delta}(f) \leq \sigma_{\Delta'}(F, \xi_i, \eta_j) \leq S_{\Delta}(f)$.

Fie (δ_n) , $(\bar{\delta}_n)$ și (δ_n^*) șiruri de diviziuni ale intervalelor $[a, b]$, $[c, d]$, respectiv $[e, g]$ iar (Δ_n) și (Δ'_n) șirurile corespunzătoare de diviziuni ale lui I respectiv D . Dacă pentru (δ_n) , $(\bar{\delta}_n)$, (δ_n^*) normele $\nu(\delta_n) \rightarrow 0$, $\nu(\bar{\delta}_n) \rightarrow 0$, $\nu(\delta_n^*) \rightarrow 0$, atunci și $\nu(\Delta_n) \rightarrow 0$, $\nu(\Delta'_n) \rightarrow 0$ și avem

$$s_{\Delta_n}(f) \leq \sigma_{\Delta'_n}(F) \leq S_{\Delta_n}(f). \quad (11.5)$$

Trecând la limită în (11.5) și având în vedere faptul că f este integrabilă pe I , rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\Delta_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta'_n}(F)$$

ceea ce înseamnă că funcția F este integrabilă pe D și în plus

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D F(x, y) dx dy = \iint_D \left(\int_e^g f(x, y, z) dz \right) dx dy \quad (11.6)$$

Observația 11.4.1 1. Egalitatea (11.6) se mai poate scrie și sub forma

$$\iiint_V F(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^g f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx \quad (11.7)$$

și sub încă alte 5 forme permutând ordinea de integrare.

2. Dacă funcția f este continuă pe I , atunci are loc egalitatea (11.6).

Exemplu 11.4.1 1. Să se calculeze integrala $I = \iiint_V (x + y + z) dz dy dx$, unde V este $0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1$. Conform formulei (11.7) se obține

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\int_0^1 (x + y + z) dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^1 dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(x + y + \frac{1}{2} \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} \right) \Big|_1^2 dx = \int_0^1 (x + 2) dx = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

2. Să presupunem că $V = D \times [e, g]$ este un cilindru, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact mărginit de curba C netedă pe porțiuni și $V \subset I = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$. Avem $D = pr_{xOy} V$, $D' = pr_{xOy} I$. Definim funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ prin $\bar{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & , (x, y, z) \in V \\ 0 & , (x, y, z) \in I - V \end{cases}$.

Funcția f este integrabilă pe I (frontiera fiecărui domeniu din $I - V$ este de volum nul) și

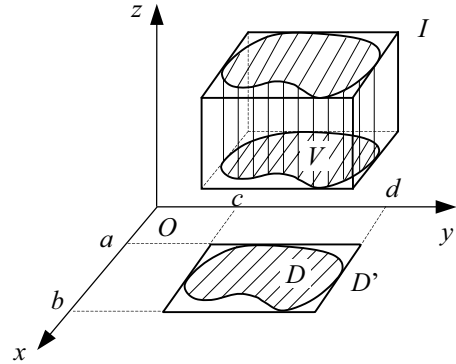


Figura 11.2:

$$\begin{aligned} \iiint_I \bar{f}(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ \iiint_I \bar{f}(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{D'} \left(\int_e^g \bar{f}(x, y, z) dz \right) dx dy = \\ &= \iint_D \left(\int_e^g f(x, y, z) dz \right) dx dy \end{aligned}$$

3. Fie domeniul compact $V \subset \mathbb{R}^3$ mărginit de suprafața S netedă pe porțiuni. Presupunem că orice paralelă la axa Oz taie suprafața S în două puncte și domeniul V este cuprins între planele paralele $z = e$ și $z = g$ ($e < g$). Considerăm cilindrul proiectant al volumului V pe planul xOy cu generatoarele paralele cu axa Oz și $D = \text{pr}_{xOy} V$, C curba ce mărginește domeniul plan D . Acest cilindru este tangent suprafeței S după curba Γ , curbă ce împarte suprafața S în două suprafețe, una de ecuație $z = \psi_1(x, y)$, $(x, y) \in D$, iar a doua de ecuație $z = \psi_2(x, y)$, $(x, y) \in D$. Dacă pentru un domeniu compact V se verifică cele prezentate anterior vom numi acest domeniu simplu în raport cu Oz .

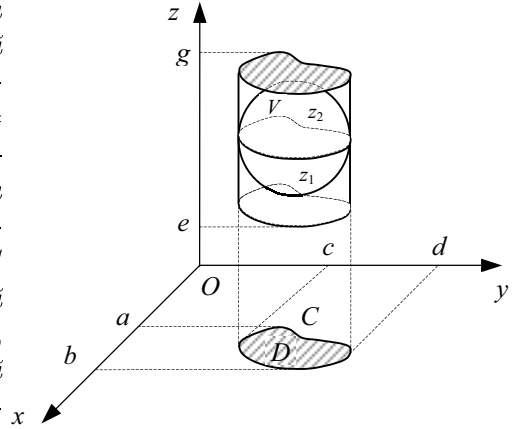


Figura 11.3:

Teorema 11.4.2 Fie f o funcție definită, mărginită și integrabilă pe domeniul compact $V \subset \mathbb{R}^3$ simplu în raport cu Oz . Dacă există integrala $F(x, y) = \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$, $\forall (x, y) \in D$, atunci există și integrala $\iint_D F(x, y) dx dy$ și are loc egalitatea

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy. \quad (11.8)$$

DEMONSTRAȚIE: Fie domeniul $D \subset [a, b] \times [c, d]$ și $V' = D \times [e, g]$. Definim funcția $\bar{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ prin $\bar{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & , (x, y, z) \in V \\ 0 & , (x, y, z) \in V' - V \end{cases}$. Funcția \bar{f} este integrabilă pe V' (frontiera fiecărui domeniu din $V' - V$ este de volum nul). Atunci avem

$$\begin{aligned} \iiint_{V'} \bar{f}(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_V \bar{f}(x, y, z) dx dy dz + \\ &+ \iiint_{V' - V} \bar{f}(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

Întrucât

$$\begin{aligned} \int_e^g \bar{f}(x, y, z) dz &= \int_e^{\psi_1(x, y)} \bar{f}(x, y, z) dz + \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} \bar{f}(x, y, z) dz + \\ &+ \int_{\psi_2(x, y)}^g \bar{f}(x, y, z) dz = \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

Acum putem aplica 2 pentru funcția \bar{f} și domeniul V'

$$\begin{aligned} \iiint_{V'} \bar{f}(x, y, z) dx dy dz &= \iint_D \left(\int_e^g \bar{f}(x, y, z) dz \right) dx dy = \\ &= \iint_D \left(\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy, \end{aligned}$$

deci

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Observația 11.4.2 1. Teoreme asemănătoare se obțin dacă domeniul V este simplu în raport cu Ox sau cu Oy .

2. Dacă domeniul V nu este simplu în raport cu axele de coordonate, atunci prin plane paralele la planele de coordonate împărțim domeniul V într-un număr finit de domenii simple, în raport cu una dintre axele de coordonate, V_i , $V = \bigcup_{k=1}^n V_k$. Atunci

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{k=1}^n \iiint_{V_k} f(x, y, z) dx dy dz.$$

3. Dacă funcția f este continuă pe domeniul simplu V (în raport cu una din axele de coordonate) atunci are loc egalitatea 11.8.

Exemplu 11.4.2 1. Să se calculeze integrala $I = \iiint_V z dx dy dz$, unde domeniul V este semielipsoidul $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \leq 0$, $z \geq 0$. Domeniul V este cuprins între planele $z = 0$ și $z = c$, iar secțiunea cu planul $z = ct$ este elipsa $D : \frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} \leq 1$. Atunci

$$\begin{aligned} I = \int_0^c \left(\iint_D z dx dy \right) dz &= \int_0^c \pi z ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right) dz = \\ &= \pi ab \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4c^2} \right) \Big|_0^c = \frac{\pi abc^2}{4} \end{aligned}$$

2. Să se calculeze integrala triplă $I = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, unde

$V : x^2 + y^2 \leq 2z$, $0 \leq z \leq 2$. Secțiunea domeniului V cu planul $z = ct$ este discul $D : x^2 + y^2 \leq 2z$. Atunci

$$I = \int_0^2 \left(\iint_D (x^2 + y^2) dx dy \right) dz = \int_0^2 2z \iint_D dx dy = \int_0^2 4\pi z^2 dz = \frac{32\pi}{3}.$$

11.5 Formula lui Gauss - Ostrogradsky

Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact mărginit de suprafața S , simplă, închisă și netedă pe porțiuni. Presupunem că domeniul V este descompus într-un număr finit de domenii simple în raport cu axele de coordonate, în particular cu Oz .

Teorema 11.5.1 Fie P, Q, R trei funcții definite și continue pe V , cu derivatele parțiale P'_x, Q'_y, R'_z continue pe V . Atunci, pentru fața exterioară a suprafeței S , are loc egalitatea

$$\begin{aligned} &\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \\ &= \iiint_V [P'_x(x, y, z) + Q'_y(x, y, z) + R'_z(x, y, z)] dx dy dz, \end{aligned} \quad (11.9)$$

numită formula integrală a lui Gauss (1777 - 1855) - Ostrogradsky (1801 - 1861).

DEMONSTRAȚIE: Întrucât domeniul V este simplu în raport cu Oz , cilindrul proiectant al domeniului V pe planul xOy cu generatoarele paralele cu axa Oz este tangent suprafeței S după curba Γ , curbă ce împarte suprafața S în două suprafețe S_1 și S_2 de ecuații $z_1 = \psi_1(x, y)$, respectiv $z_2 = \psi_2(x, y)$, $(x, y) \in D = \text{pr}_{xOy} V$.

Conform relației (11.8) avem

$$\begin{aligned} \iiint_V R'_z(x, y, z) dx dy dz &= \iint_D \left(\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} R'_z(x, y, z) dz \right) dx dy = \\ &= \iint_D R(x, y, z) \Big|_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} dx dy = \\ &= \iint_D [R(x, y, \psi_2(x, y)) - R(x, y, \psi_1(x, y))] dx dy \end{aligned} \quad (11.10)$$

Dar

$$\iint_D R(x, y, \psi_2(x, y)) dx dy = \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy \quad (11.11)$$

și

$$- \iint_D R(x, y, \psi_1(x, y)) dx dy = - \iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy, \quad (11.12)$$

unde pentru S_2 s-a luat fața superioară care coincide cu fața exterioară a suprafeței S , iar pentru S_1 s-a luat fața inferioară care coincide cu fața exterioară a suprafeței S .

Din egalitățile (11.10), (11.11) și (11.12) se obține

$$\iiint_V R'_z(x, y, z) dx dy dz = \iint_S R(x, y, z) dx dy, \quad (11.13)$$

integrala de suprafață fiind luată pe fața exterioară a suprafeței S . Considerând acum domeniul V simplu în raport cu Ox , respectiv Oy , în mod analog se obțin egalitățile:

$$\iiint_V P'_x(x, y, z) dx dy dz = \iint_S P(x, y, z) dy dz \quad (11.14)$$

$$\iiint_V Q'_y(x, y, z) dx dy dz = \iint_S Q(x, y, z) dy dx \quad (11.15)$$

Adunând egalitățile (11.14), (11.15), (11.16) rezultă egalitatea (11.9).

Teorema 11.5.2 Fie P, Q, R trei funcții definite și continue pe V cu derivatele parțiale P'_x, Q'_y, R'_z continue pe V . Atunci, pentru fața interioară a suprafeței S are loc egalitatea

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \\ - \iiint_V [P'_x(x, y, z) + Q'_y(x, y, z) + R'_z(x, y, z)] dx dy dz. \end{aligned}$$

Observația 11.5.1 1. Teorema 11.5.1 poate fi reformulată astfel:

Fie $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe domeniul compact V . Atunci fluxul lui \vec{F} prin suprafața închisă S este egal cu integrala divergenței lui \vec{F} pe domeniul V , adică

$$\iint_S (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iiint_V \text{div } \vec{F} dx dy dz \quad (11.16)$$

(formula flux-divergență).

2. Formula flux-divergență se folosește la calculul integralelor de suprafață de speța a doua, dacă suprafața este închisă.
3. Dacă F este un câmp scalar de clasă C^1 pe domeniul compact V , atunci egalitatea (11.16) devine

$$\iint_S F \bar{n} d\sigma = \iiint_V \text{grad } F dx dy dz$$

(formula gradientului).

4. Dacă $\bar{F} = \bar{w} \times \bar{a}$, unde a este un vector arbitrar, atunci $\text{div } \bar{F} = (\bar{a}, \text{rot } \bar{w})$ și egalitatea (11.16) devine

$$\iint_S (\bar{n} \times \bar{w}) d\sigma = \iiint_V \text{rot } \bar{w} dx dy dz$$

(formula rotorului).

5. Dacă în formula (11.9) considerăm $P(x, y, z) = 0$, $Q(x, y, z) = 0$ și $P(x, y, z) = z$ obținem $v = \iint_S z dx dy$, unde v este volumul domeniului V .

Exemplu 11.5.1 Cu ajutorul formulei Gauss - Ostrogradski să se calculeze integrala de suprafață $I = \iint_S x^3 dy dz + x^2 y dz dx + x^2 z dx dy$, S fiind fața exterioară a suprafeței închise a cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq b$. Domeniul V mărginit de suprafața S este $V : x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq b$. Conform formulei (11.9) se obține

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V 5x^2 dx dy dz = 5 \int_0^b \left(\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^2 dx dy \right) dz = \\ &= 5 \int_0^b \left(\int_0^a \left(\int_0^{2\pi} r^3 \cos^2 t dt \right) dr \right) dz = 5 \int_0^b \left(\int_0^a \pi r^3 dr \right) dz = \frac{5\pi a^3 b}{4}. \end{aligned}$$

11.6 Schimbarea de variabilă la integrala triplă

Considerăm în spațiul $Oxyz$ domeniul compact V mărginit de suprafața S netedă pe porțiuni, iar în spațiul $Ouvw$ domeniul compact V' mărginit de suprafața S' netedă pe porțiuni. Fie transformarea regulată a domeniului V' în V dată de

$$\begin{cases} x = f(u, v, w) \\ y = g(u, v, w) \\ z = h(u, v, w) \end{cases}, \quad (u, v, w) \in V' \quad (11.17)$$

cu f, g, h având derivate parțiale mixte de ordinul al doilea funcții continue pe V' .

Dacă se ia în domeniul V' o suprafață netedă pe porțiuni dată de reprezentarea

$$u = u(s, t), \quad v = v(s, t), \quad w = w(s, t), \quad (s, t) \in D$$

atunci (11.17) transformă această suprafață într-o suprafață netedă pe porțiuni din domeniul V având ecuațiile

$$\begin{cases} x = f(u(s, t), v(s, t), w(s, t)) \\ y = g(u(s, t), v(s, t), w(s, t)) \\ z = h(u(s, t), v(s, t), w(s, t)) \end{cases}, \quad (s, t) \in D.$$

Teorema 11.6.1 Dacă determinantul funcțional $\frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}$, $(u,v,w) \in D'$, este pozitiv, respectiv negativ, atunci suprafețele S și S' au aceeași orientare, respectiv au orientări inverse și există un punct $(u_0, v_0, w_0) \in V'$ astfel încât

$$v = \left| \frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}(u_0, v_0, w_0) \right| v'.$$

DEMONSTRAȚIE: Volumul domeniului compact V exprimat cu ajutorul integralei de suprafață pe fața exterioară a suprafeței S este

$$v = \iint_S z dx dy = \pm \iint_D z \frac{D(x,y)}{D(s,t)} ds dt \quad (11.18)$$

Integrala se ia cu semnul "+" dacă domeniul D are aceeași orientare cu suprafața S și cu semnul "-" dacă domeniul D are orientare inversă față de suprafața S . Dar

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \frac{D(f,g)}{D(u,v)} \frac{D(u,v)}{D(s,t)} + \frac{D(f,g)}{D(v,w)} \frac{D(v,w)}{D(s,t)} + \frac{D(f,g)}{D(w,u)} \frac{D(w,u)}{D(s,t)}$$

Înlocuind expresia determinantului $\frac{D(x,y)}{D(s,t)}$ în relația (11.18) se obține

$$\begin{aligned} v &= \pm \iint_D z \left[\frac{D(f,g)}{D(u,v)} \frac{D(u,v)}{D(s,t)} + \frac{D(f,g)}{D(v,w)} \frac{D(v,w)}{D(s,t)} + \frac{D(f,g)}{D(w,u)} \frac{D(w,u)}{D(s,t)} \right] ds dt = \\ &= \pm \iint_{S'} z \left[\frac{D(f,g)}{D(u,v)} dudv + \frac{D(f,g)}{D(v,w)} dv dw + \frac{D(f,g)}{D(w,u)} dw du \right] \end{aligned} \quad (11.19)$$

Cu ajutorul formulei Gauss - Ostrogradski aplicată pentru integrala din membrul drept al egalității (11.19) avem

$$v = \pm \iiint_{V'} \left[\frac{\partial}{\partial w} \left(z \frac{D(f,g)}{D(u,v)} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(z \frac{D(f,g)}{D(v,w)} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(z \frac{D(f,g)}{D(w,u)} \right) \right] dudv dw \quad (11.20)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial w} \left(z \frac{D(f,g)}{D(u,v)} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(z \frac{D(f,g)}{D(v,w)} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(z \frac{D(f,g)}{D(w,u)} \right) = \frac{\partial h}{\partial w} \frac{D(f,g)}{D(u,v)} + \\ &+ \frac{\partial h}{\partial u} \frac{D(f,g)}{D(v,w)} + \frac{\partial h}{\partial v} \frac{D(f,g)}{D(w,u)} + z \left[\frac{\partial}{\partial w} \frac{D(f,g)}{D(u,v)} + \frac{\partial}{\partial u} \frac{D(f,g)}{D(v,w)} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{D(f,g)}{D(w,u)} \right] = \\ &= \frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)} + z \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial w} - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial w} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial g}{\partial w} + \right. \\ &+ \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 g}{\partial w \partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial v} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - \\ &\left. - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 g}{\partial w \partial v} \right] = \frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)} \end{aligned}$$

Înlocuind relația obținută în (11.20) ajungem la formula

$$v = \pm \iiint_{V'} \frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)} dudv dw = \iiint_{V'} \left| \frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)} \right| dudv dw.$$

Aplicând formula de medie ultimei relații, rezultă existența unui punct $(u_0, v_0, w_0) \in V'$ astfel încât

$$v = \left| \frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}(u_0, v_0, w_0) \right| v'$$

Teorema 11.6.2 *Fie domeniile compacte V' și V în corespondență prin transformarea regulată (11.17). Dacă F este o funcție continuă pe domeniul V , atunci are loc următoarea egalitate*

$$\begin{aligned} \iiint_V F(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{V'} F(f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)) \\ &\quad \left| \frac{D(f, g, h)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw, \end{aligned} \quad (11.21)$$

numită formula schimbării de variabilă la integrala triplă.

DEMONSTRAȚIE: Considerăm $\Delta' = (s'_1, s'_2, \dots, s'_p)$ o diviziune a domeniului V' . Prin transformarea (11.17) acestei diviziuni îi corespunde diviziunea $\Delta = (s_1, s_2, \dots, s_p)$ a domeniului V . Dacă $v(s_k), v(s'_k)$ sunt volumele paralelipipedelor s_k , respectiv $s'_k, k = \overline{1, p}$, atunci conform teoremei 11.6.1 există punctele $(u_k, v_k, w_k) \in s'_k$ astfel încât să avem

$$v(s_k) = \left| \frac{D(f, g, h)}{D(u, v, w)}(u_k, v_k, w_k) \right| v(s'_k).$$

Fie $x_k = f(u_k, v_k, w_k)$, $y_k = g(u_k, v_k, w_k)$, $z_k = h(u_k, v_k, w_k)$, $k = \overline{1, p}$, $(u_k, v_k, w_k) \in s'_k$, $(x_k, y_k, z_k) \in s_k$. Atunci

$$\begin{aligned} \sigma_\Delta(F; (x_k, y_k, z_k)) &= \sum_{k=1}^p F(x_k, y_k, z_k) v(s_k) = \\ &= \sum_{k=1}^p F(f(u_k, v_k, w_k), g(u_k, v_k, w_k), h(u_k, v_k, w_k)) \left| \frac{D(f, g, h)}{D(u, v, w)}(u_k, v_k, w_k) \right| v(s'_k) \\ &= \sigma_{\Delta'} \left(F(f, g, h) \left| \frac{D(f, g, h)}{D(u, v, w)} \right| \right). \end{aligned}$$

Dacă (Δ'_n) este un șir de diviziuni ale domeniului V' cu $\nu(\Delta'_n) \rightarrow 0$, atunci șirul corespunzător de diviziuni ale domeniului V , prin transformarea (11.17), (Δ_n) , are $\nu(\Delta_n) \rightarrow 0$. Avem

$$\sigma_{\Delta_n}(F) = \sigma_{\Delta'_n} \left(F(f, g, h) \left| \frac{D(f, g, h)}{D(u, v, w)} \right| \right)$$

și trecând la limită rezultă

$$\begin{aligned} \iiint_V F(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{V'} F(f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)) \\ &\quad \left| \frac{D(f, g, h)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw. \end{aligned}$$

Exemplu 11.6.1 1. Pentru calculul integralei $I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, unde $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ folosim coordonatele sferice $x = r \cos \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$, $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$; $\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = r^2 \cos \varphi$. Cu ajutorul formulei (11.21) se obține

$$I = \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^4 \cos \varphi d\varphi \right) d\theta \right) dr = 4\pi \left. \frac{r^5}{5} \right|_0^a = \frac{4\pi a^5}{5}.$$

2. Pentru calculul integralei $= \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, unde $V : x^2 + y^2 - 2x \leq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1$ folosim coordonatele cilindrice: $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z, \theta \in [0, \pi], r \in [0, 2 \sin \theta], z \in [0, 1]; \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, z)} = r$. Cu ajutorul formulei (11.21) se obține

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \left(\int_0^{2 \sin \theta} \left(\int_0^1 r^3 dz \right) dr \right) d\theta = \int_0^\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^{2 \sin \theta} d\theta = \\ &= 4 \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

11.7 Aplicații ale integralelor triple

1. Volumul corpurilor

Volumul v al unui domeniu compact $V \subset \mathbb{R}^3$ (care are volum) este

$$v = \iiint_V dx dy dz \quad (11.22)$$

2. Masa corpurilor

Masa unui corp material care ocupă domeniul compact $V \subset \mathbb{R}^3$ și are densitatea $\rho(x, y, z)$ cu ρ funcție continuă este

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z) dz dy dx \quad (11.23)$$

3. Coordonatele centrului de greutate x_G, y_G, z_G al unui corp material care ocupă domeniul compact $V \subset \mathbb{R}^3$ și cu densitatea $\rho(x, y, z)$ sunt:

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{m} \iiint_V x \rho(x, y, z) dx dy dz \\ y_G &= \frac{1}{m} \iiint_V y \rho(x, y, z) dx dy dz \\ z_G &= \frac{1}{m} \iiint_V z \rho(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned} \quad (11.24)$$

Dacă corpul material este omogen, atunci coordonatele centrului de greutate sunt

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{v} \iiint_V x dx dy dz \\ y_G &= \frac{1}{v} \iiint_V y dx dy dz \\ z_G &= \frac{1}{v} \iiint_V z dx dy dz. \end{aligned}$$

Exemplu 11.7.1 Să se determine coordonatele centrului de greutate al corpului $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0$ cu densitatea de masă $\rho(x, y, z) = 1$.

$$v = \iiint_V dx dy dz = \frac{2\pi abc}{3}.$$

Pentru calculul integralelor $\iiint_V x dx dy dz$, $\iiint_V y dx dy dz$ folosim coordonatele sferice $x = ar \cos \theta \cos \varphi$, $y = br \sin \theta \cos \varphi$, $z = cr \sin \varphi$, $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; $\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = abcr^2 \cos \varphi$. Atunci $\iiint_V x dx dy dz = 0$, $\iiint_V y dx dy dz = 0$. Din exemplul 11.4.2 avem $\iiint_V z dx dy dz = \frac{\pi abc^2}{4}$.

4. Fie K un corp material care ocupă domeniul compact $V \subset \mathbb{R}^3$ și are densitatea $\rho(x, y, z)$. Momentul de inerție al lui K față de originea axelor este

$$I = \iiint_V \rho(x, y, z)(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Momentele de inerție ale lui K față de axele de coordonate Ox , Oy și Oz sunt

$$\begin{aligned} I_{Ox} &= \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz \\ I_{Oy} &= \iiint_V (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz \\ I_{Oz} &= \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

Momentele de inerție ale lui k față de planele de coordonate Oyz , Ozx și Oxy sunt

$$\begin{aligned} I_{Oyz} &= \iiint_V x^2 \rho(x, y, z) dx dy dz \\ I_{Ozx} &= \iiint_V y^2 \rho(x, y, z) dx dy dz \\ I_{Oxy} &= \iiint_V z^2 \rho(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

5. Fie un punct material $P(x_0, y_0, z_0)$ de masă m și un corp material care ocupă domeniul compact $V \subset \mathbb{R}^3$ și are densitatea $\rho(x, y, z)$. Proiecțiile pe axele de coordonate ale forței \bar{F} cu care punctul P este atras de corpul material sunt

$$\begin{aligned} F_x &= \lambda m \iiint_V \frac{\rho(x, y, z)}{r^3} (x - x_0) dx dy dz \\ F_y &= \lambda m \iiint_V \frac{\rho(x, y, z)}{r^3} (y - y_0) dx dy dz \\ F_z &= \lambda m \iiint_V \frac{\rho(x, y, z)}{r^3} (z - z_0) dx dy dz, \end{aligned}$$

unde $\lambda = \text{const.}$, iar $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$, $(x, y, z) \in V$.

Exemplu 11.7.2 Să se calculeze momentul de inerție în raport cu originea, pentru porțiunea de sferă $(V) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, densitatea de masă fiind $\rho(x, y, z) = z$. Momentul de inerție în raport cu originea este

$$I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) z dx dy dz.$$

Folosind coordonatele sferice, domeniul V se transformă în domeniul $V' : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, deci

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a r^5 \sin \varphi \cos \varphi dr \right) d\varphi \right) d\theta = \frac{\pi a^6}{24}.$$

Capitolul 12

Serii Fourier

12.1 Serii Fourier

Bazele teoriei seriilor trigonometrice au fost puse de către matematicianul J. de Fourier (1768 -1830). Seriile trigonometrice sunt de mare importanță pentru matematică, fizică, ele folosindu-se la cercetarea mișcărilor periodice în acustică, electrodinamică, optică, termodinamică, în radiotehnică, în mecanica undelor. Cu ajutorul seriilor Fourier pot fi rezolvate probleme de comportare a frecvențelor și propagarea impulsului. De asemenea seriile trigonometrice se folosesc și în prognoza mareelor.

Ideea care stă la baza acestor serii este reprezentarea funcțiilor periodice prin serii de funcții periodice trigonometrice.

Definiția 12.1.1 *Seria de funcții $\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, unde $a_n, b_m \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$, $m \geq 1$ se numește serie trigonometrică cu coeficienți a_n, b_m .*

Dacă $s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $n \geq 1$, sunt sumele parțiale ale unei astfel de serii, atunci ele se numesc polinoame trigonometrice de ordin n .

Observația 12.1.1 *Seriile trigonometrice fiind serii de funcții de perioadă principală 2π , este suficient de studiat comportarea acestora pe un interval de lungime 2π .*

Teorema 12.1.1 *Fie*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (12.1)$$

o serie trigonometrică convergentă pe intervalul $[-\pi, \pi]$ și $f(x)$ suma acestei serii. Atunci:

1. *Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este periodică, de perioadă principală 2π .*
2. *Dacă seria trigonometrică (12.1) este uniform convergentă pe $[-\pi, \pi]$, atunci funcția f este continuă pe $[-\pi, \pi]$, iar coeficienții serie (12.1) sunt dați de formulele*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n \geq 0 \quad (12.2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \geq 1 \quad (12.3)$$

numite formulele lui Euler - Fourier.

DEMONSTRAȚIE: 1. Fie $s_0 = \frac{a_0}{2}$, $s_n(x) = \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $n \geq 1$ șirul sumelor parțiale asociat seriei (12.1). Avem $s_n \rightarrow f$, și cum s_n , $n \geq 1$, sunt funcții periodice de perioadă 2π , rezultă că și f are aceeași proprietate.

2. Întrucât $s_n \xrightarrow{UC} f$, iar s_n sunt funcții continue rezultă că și f este continuă.

Deoarece o serie de funcții uniform convergentă se poate integra termen cu termen, integrând seria (12.1) obținem:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n \geq 1} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \pi a_0, \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \end{aligned}$$

Înmulțind relația $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ cu funcțiile mărginite $\cos mx$, respectiv $\sin mx$, convergența uniformă și continuitatea factorilor pe intervalul $[-\pi, \pi]$ se păstrează și putem integra termen cu termen.

$$\begin{aligned} f(x) \cos mx &= \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx), \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + \right. \\ &\quad \left. + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \right] \end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \pi a_m, \text{ de unde obținem (12.2).}$$

$$\begin{aligned} f(x) \sin mx &= \frac{a_0}{2} \sin mx + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx \sin mx + b_n \sin nx \sin mx), \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx + \right. \\ &\quad \left. + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx \right] \end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \pi b_m, \text{ de unde obținem (12.3).}$$

Observația 12.1.2 Pentru serii trigonometrice de perioadă $2l$ seria (12.1) va fi înlocuită cu seria

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \right),$$

iar intervalul $[-\pi, \pi]$ va fi înlocuit cu intervalul $[-l, l]$. Coeficienții $a_n, b_n, n \geq 0, m \geq 1$ sunt dați de relațiile

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \geq 0 \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (12.4)$$

Definiția 12.1.2 Fie f o funcție integrabilă și periodică de perioadă 2π și

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n \geq 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Seria trigonometrică asociată

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (12.5)$$

se numește seria Fourier a funcției f , iar coeficienții a_n, b_n se numesc coeficienți Fourier a lui f . Faptul că seria (12.5) este generată de funcția f se notează astfel $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

Observația 12.1.3 1. Dacă f este o funcție pară, atunci

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n \geq 0 \quad i \quad b_n = 0, \quad n \geq 1,$$

iar dacă f este impară, atunci

$$a_n = 0, \quad n \geq 0 \quad i \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \geq 1.$$

2. Coeficienții Fourier sunt atașați unei funcții integrabile și nu unei serii trigonometrice. Fiecărei funcții integrabile pe $[-\pi, \pi]$ îi corespunde un șir infinit de coeficienți Fourier dați de (12.2) și (12.3).

Considerăm o funcție f integrabilă pe intervalul $[-\pi, \pi]$. Cu coeficienții Fourier dați de (12.2) și (12.3) putem construi seria Fourier asociată funcției f . Asupra unei serii Fourier se ridică mai multe probleme. O serie Fourier este întotdeauna convergentă? În ce condiții o serie Fourier este uniform convergentă? Dacă o serie Fourier este convergentă, atunci suma ei este funcția f ? Este posibil ca două funcții diferite f și g integrabile pe $[-\pi, \pi]$ să admită aceeași serie Fourier? Dată fiind o serie trigonometrică, există o funcție integrabilă pe $[-\pi, \pi]$ care să admită seria dată ca serie Fourier?

Teorema 12.1.1 afirmă că o serie trigonometrică uniform convergentă pe $[-\pi, \pi]$ este seria Fourier a sumei sale. Deci orice serie trigonometrică uniform convergentă este o serie Fourier.

Teorema 12.1.2 Inegalitatea lui Bessel (1784 - 1846)

Fie f o funcție integrabilă pe $[-\pi, \pi]$,

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

polinomul Fourier asociat funcției f și

$$p_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

polinom trigonometric de grad n , arbitrar. Atunci

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - p_n(x)]^2 dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx.$$

DEMONSTRAȚIE:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - p_n(x)]^2 dx &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) p_n(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} p_n^2(x) dx \right] \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) p_n(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\alpha_0}{2} dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left[\alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + \right. \\ &\left. + \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right] = \frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) \end{aligned} \quad (12.6)$$

Deoarece $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 0 & , \quad n \neq m \\ \pi & , \quad n = m \end{cases}$ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0 & , \quad n \neq m \\ \pi & , \quad n = m, \end{cases}$ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi$ și $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi$ avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_n^2(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\alpha_0^2}{4} + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \cos^2 kx + \beta_k^2 \sin^2 kx \right] dx = \\ &= \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \end{aligned} \quad (12.7)$$

Din relațiile (12.6) și (12.7) rezultă

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - p_n(x)]^2 dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \left[\frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) \right] + \\ &+ \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \frac{\alpha_0^2 - 2\alpha_0 a_0}{2} + \\ &+ \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 - 2\alpha_k a_k + \beta_k^2 - 2\beta_k b_k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \\ &+ \frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^n [(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2] - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \end{aligned} \quad (12.8)$$

Expresia din membrul drept al egalității (12.8) este minimă atunci când $\alpha_0 - a_0 = \alpha_k - a_k = \beta_k - b_k = 0$, adică, atunci când polinomul trigonometric $p_n(x)$ este chiar $s_n(x)$. Obținem astfel

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - p_n(x)]^2 dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx.$$

Observația 12.1.4

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right] \geq 0 \\ \Rightarrow \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \end{aligned} \quad (12.9)$$

inegalitatea lui Bessel. Deoarece inegalitatea (12.9) are loc pentru orice număr natural n , avem

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Seria cu termenul general $a_n^2 + b_n^2$ este convergentă, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

2. Dacă f este o funcție continuă pe intervalul $[-\pi, \pi]$, iar $a_n, b_n, n \geq 0$ și $m \geq 1$ sunt coeficienții Fourier ai funcției f , atunci are loc egalitatea:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

numită egalitatea Parseval-Leapunov.

Definiția 12.1.3 Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și pentru orice $x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right)}{2\pi \sin \frac{x}{2}} \quad (12.10)$$

se numește nucleul lui Dirichlet.

Teorema 12.1.3 Dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție absolut integrabilă și periodică de perioadă 2π , iar s_n este suma parțială a seriei Fourier asociate lui f , atunci

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt$$

DEMONSTRAȚIE: Se știe că

$$1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \cdots + 2\cos nx = \frac{\sin\left(nx + \frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}.$$

Din (12.10) rezultă

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + \sum_{k=1}^n 2\cos kx \right], \quad \forall x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dacă $\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ este seria Fourier asociată funcției f , atunci

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) \right] dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt, \quad \forall n \geq 0 \end{aligned}$$

numită integrala lui Dirichlet.

Lema 12.1.1 (lema lui Riemann)

Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție absolut integrabilă pe intervalul $[a, b]$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos nx dx = 0. \quad (12.11)$$

DEMONSTRAȚIE: Presupunem funcția f integrabilă pe $[a, b]$ și fie $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$.

$$\int_a^b f(t) \sin ntdt = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) \sin ntdt \quad (12.12)$$

Notăm $m_i = \inf_{t \in [t_i, t_{i+1}]} f(t)$. Atunci integrala (12.12) devine

$$\int_a^b f(t) \sin ntdt = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f(t) - m_i) \sin ntdt + \sum_{i=0}^{m-1} m_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sin ntdt.$$

Fie ε_i oscilația funcției f în intervalul $[t_i, t_{i+1}]$, $f(t) - m_i \leq \varepsilon_i$. Avem

$$\left| \int_a^b f(t) \sin ntdt \right| \leq \sum_{i=0}^{m-1} \varepsilon_i (t_{i+1} - t_i) + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{m-1} |m_i|.$$

Întrucât funcția f este integrabilă, pentru $\varepsilon > 0$ alegem diviziunea Δ astfel încât

$$\sum_{i=0}^{m-1} \varepsilon_i (t_{i+1} - t_i) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{și} \quad n > \frac{4}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{m-1} |m_i|.$$

Pentru aceste valori ale lui n se obține $\left| \int_a^b f(t) \sin ntdt \right| < \varepsilon$, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin ntdt = 0$.

În mod similar se arată că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos ntdt = 0$. Să presupunem că funcția f este absolut integrabilă pe $[a, b]$ și b este un punct singular (altfel s-ar descompune intervalul $[a, b]$ într-un număr finit de intervale ce conțin un singur punct singular).

Fie $0 < c < b - a$;

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \sin ntdt &= \int_a^{b-c} f(t) \sin ntdt + \int_{b-c}^b f(t) \sin ntdt \\ \left| \int_{b-c}^b f(t) \sin ntdt \right| &\leq \int_{b-c}^b |f(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

deoarece funcția f este absolut integrabilă pe $[a, b]$.

Pe intervalul $[a, b-c]$ funcția f este integrabilă și pentru orice $\varepsilon > 0$ avem $\left| \int_a^{b-c} f(t) \sin nt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, conform celor demonstrate mai sus.

Astfel $\forall \varepsilon > 0 \quad \left| \int_a^b f(t) \sin ntdt \right| < \varepsilon$, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin nt = 0$.

Observația 12.1.5 1. Dacă a_n, b_n sunt coeficienții Fourier ai unei funcții absolut integrabile, atunci $a_n, b_n \rightarrow 0$.

2. Dacă funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe porțiuni pe intervalul $[a, b]$, atunci au loc relațiile (12.11).

Teorema 12.1.4 *Teorema lui Dirichlet*

Dacă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe porțiuni, cu limite laterale finite în orice punct, de perioadă 2π și derivabilă pe porțiuni, cu derivate laterale în orice punct, atunci seria Fourier a lui f converge către $f(x)$ dacă x este punct de continuitate al funcției și către $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ dacă x este punct de discontinuitate al funcției.

DEMONSTRAȚIE. Notăm $s = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ și evaluăm produsul de convoluție $D_n * (f - s)$.

$$\begin{aligned} [D_n * (f - s)](x) &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - s] D_n(t) dt = \int_{\pi}^{-\delta} [f(x-t) - s] D_n(t) dt + \\ &\quad + \int_{-\delta}^{\delta} [f(x-t) - s] D_n(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} [f(x-t) - s] D_n(t) dt = \\ &= I_1 + I_2 + I_3, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall 0 < \delta < \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\pi}^{-\delta} [f(x-t) - s] D_n(t) dt = \int_{-\pi}^{-\delta} \frac{f(x-t) - s}{2\pi \sin \frac{t}{2}} \sin \left(nt + \frac{t}{2} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} \left[(f(x-t) - s) \frac{\cos t}{\sin \frac{t}{2}} \right] \sin ntdt + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} \left[(f(x-t) - s) \cos \frac{t}{2} \right] \cos ntdt. \end{aligned}$$

Deoarece funcțiile $(f(x-t) - s) \frac{1}{\sin \frac{t}{2}}$ și $(f(x-t) - s) \cos \frac{t}{2}$ sunt continue pe porțiuni rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = 0$.

În mod analog se arată că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_3 = 0$.

Din ipoteză avem existența unui număr $c > 0$ astfel ca

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x-0)| &\leq c|t-x| \quad \text{i} \\ |f(t) - f(x+0)| &\leq c|t-x| \end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - s| \frac{|\sin \left(nt + \frac{t}{2} \right)|}{2\pi \sin \frac{t}{2}} dt \leq \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} \left| f(x-t) - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \right| \frac{1}{2\pi \sin \frac{t}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x-t) - f(x-0) + f(x-t) - f(x+0)|}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{c|t|}{\sin \frac{t}{2}} dt = \frac{c}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|t|}{\sin \frac{t}{2}} dt. \end{aligned}$$

Fie $m = \sup_{|t| \leq \delta} \frac{|t|}{\sin \frac{t}{2}}$. Astfel $|I_2| \leq \frac{mc\delta}{\pi}$.

Pentru $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$ $\frac{mc\delta}{\pi} < \varepsilon$, ceea ce înseamnă că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = 0$, adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [D_n * (f - s)](x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (12.13)$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} [D_n * (f - s)](x) &= \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)[f(x-t) - s]dt = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x-t)dt - \\ &- s \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = (D_n * f)(x) - s \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}(1 + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n \cos kx)dx = (D_n * f)(x) - s = s_n(x) - s. \end{aligned}$$

Din (12.13) obținem că $s_n \rightarrow s$.

Corolarul 12.1.1 Dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție periodică de perioadă 2π , continuă, derivabilă pe porțiuni, atunci seria Fourier a lui f converge punctual având ca sumă pe f .

Teorema 12.1.5 Criteriul Dirichlet - Jordan

Seria Fourier a funcției absolut integrabile, periodice cu perioada 2π , $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, converge către suma $s(x)$ în punctul x , dacă în orice interval $[x_0 - h, x_0 + h]$, funcția are valori mărginite.

DEMONSTRAȚIE. vezi [5] vol. III.

Observația 12.1.6 Condițiile din criteriul Dirichlet au un caracter mai particular decât cele din criteriul Dirichlet-Jordan.

Exemplu 12.1.1 1. Să se dezvolte în serie Fourier funcția $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ în intervalul $(0, 2\pi)$ și apoi să se deducă suma seriei $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Funcția $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ satisface ipoteza teoremei lui Dirichlet. Coeficienții dezvoltării în serie Fourier sunt:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\pi x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^{2\pi} = 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx dx = \frac{1}{2\pi} (\pi - x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{2\pi} + \\ &+ \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx = -\frac{1}{2\pi} (\pi - x) \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \\ &- \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Deci seria Fourier corespunzătoare este

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in (0, 2\pi) \quad (12.14)$$

Pentru $x = 0$ sau $x = 2\pi$ suma seriei este $s(0) = s(2\pi) = \frac{f(0+0) + f(2\pi-0)}{2} = 0$.

Luând $x = \frac{\pi}{2}$ în (12.14) avem $\frac{\pi}{4} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

2. Să se dezvolte în serie Fourier funcția $f(x) = 10 - x$ în intervalul $(5, 15)$.

În acest caz folosim formula (12.4) pentru $l = 5$. Avem

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{5} \int_5^{15} (10 - x) \cos \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{1}{n\pi} (10 - x) \sin \frac{n\pi x}{5} \Big|_5^{15} + \\ &\quad + \frac{1}{n\pi} \int_5^{15} \sin \frac{n\pi x}{5} dx = 0, \\ b_n &= \frac{1}{5} \int_5^{15} (10 - x) \sin \frac{n\pi x}{5} dx = -\frac{1}{n\pi} (10 - x) \cos \frac{n\pi x}{5} \Big|_5^{15} - \\ &\quad - \frac{1}{n\pi} \int_5^{15} \cos \frac{n\pi x}{5} dx = (-1)^n \frac{10}{n\pi} \end{aligned} \quad (12.15)$$

Deci

$$10 - x = \frac{10}{\pi} \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{5}, \quad x \in (5, 15).$$

3. Să se dezvolte în serie Fourier funcția $f(x) = |x|$ în intervalul $[-\pi, \pi]$. Funcția $f(x) = |x|$ satisface ipoteza teoremei lui Dirichlet.

Deoarece funcția f este pară avem $b_n = 0$ și

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{x^2}{\pi} \Big|_0^{\pi} = \pi, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1], \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Seria Fourier corespunzătoare este:

$$\begin{aligned} |x| &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad x \in (-\pi, \pi) \\ s(-\pi) &= s(\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \pi. \end{aligned}$$

12.2 Operații cu serii Fourier

Integrarea seriilor Fourier

Teorema 12.2.1 Fie funcția f integrabilă pe intervalul $[-\pi, \pi]$ și seria Fourier asociată funcției f ,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Seria Fourier asociată funcției f este integrabilă și integrala funcției $f(x)$ se obține prin integrarea termen cu termen a seriei Fourier asociate.

DEMONSTRAȚIE. Considerăm funcția

$$F(x) = \int_0^x \left(f(x) - \frac{a_0}{2} \right) dx, \quad (12.16)$$

$x \in [-\pi, \pi]$ care este o funcție continuă și cu variație mărginită și de perioadă 2π , deoarece

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - \pi a_0 = 0.$$

Conform teoremei Dirichlet-Jordan, funcția $F(x)$ se dezvoltă în serie Fourier pentru $\forall x \in [-\pi, \pi]$,

$$F(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx \quad (12.17)$$

și seria Fourier corespunzătoare funcției F converge uniform pe intervalul $[-\pi, \pi]$ către F . Avem:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx dx = \frac{1}{n\pi} F(x) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \\ &= -\frac{b_n}{n}, \quad \alpha_n = -\frac{b_n}{n}, \quad n \geq 1; \end{aligned} \quad (12.18)$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx dx = -\frac{1}{n\pi} F(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \\ &= \frac{a_n}{n}, \quad \beta_n = \frac{a_n}{n}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (12.19)$$

Dacă în (12.17) $x = 0$ atunci se obține

$$\frac{\alpha_0}{2} = -\sum_{n \geq 1} \alpha_n = \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n} \quad (12.20)$$

Înlocuind în (12.17) α_n, β_n și α_0 din (12.18), (12.19) și (12.20) avem

$$F(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n \sin nx + b_n(1 - \cos x)}{n}$$

care împreună cu (12.16) ne dă

$$\int_0^x f(x) dx = \int_0^x \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n \geq 1} \int_0^x (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx.$$

Pentru orice $x_1, x_2 \in [-\pi, \pi], x_1 < x_2$ se obține

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n \geq 1} \int_{x_1}^{x_2} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx.$$

Exemplu 12.2.1 Considerăm dezvoltarea $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in (0, 2\pi)$. Integrând pe intervalul $[0, x]$ obținem

$$\int_0^x \sum_{n \geq 1} \frac{\sin nt}{n} dt = \int_0^x \frac{\pi - t}{2} dt,$$

adică

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1 - \cos nx}{n^2} = \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{4}x^2,$$

de unde rezultă că

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + c,$$

unde

$$c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

Astfel am obținut

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}$$

Derivarea termen cu termen a seriei Fourier

Fie funcție f continuă pe intervalul $[-\pi, \pi]$ și presupunem că în afara unui număr finit de puncte izolate există derivata funcției f și că f' este absolut integrabilă pe $[-\pi, \pi]$.

Atunci seria Fourier a funcției f se obține din seria Fourier a funcției f' ,

$$f'(x) \sim \sum_{n \geq 1} a'_n \cos nx + b'_n \sin nx, \quad (12.21)$$

prin integrare termen cu termen. Termenul liber a'_0 al seriei (12.21) este zero. Într-adevăr,

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} (f(\pi) - f(-\pi)) = 0.$$

Are loc și reciproca. Seria (12.21) a derivatei $f'(x)$ se poate obține din seria Fourier corespunzătoare funcției f prin derivare termen cu termen.

Bibliografie

- [1] CÂMPIAN, V., *Analiză matematică*, curs litografiat, I.P. Cluj-Napoca, 1992.
- [2] COLOJOARĂ, I., *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
- [3] CRAIU, M. și VASILE, V., *Analiză matematică*, Editura didactică și pedagogică, București, 1980.
- [4] DRĂGUȘIN, C., DRĂGUȘIN LUCIA, CÎȘLARU, C., *Analiză matematică*, Editura Teora, București, 1993.
- [5] FIHTENHOLT, G.M., *Curs de calcul diferențial și integral*, vol. I, II, III, Editura Tehnică, București, 1965.
- [6] FLONDOR, P., STĂNĂȘILĂ, O., *Lecții de analiză matematică și exerciții rezolvate*, Editura All, București, 1998.
- [7] MEGHEA, C., *Bazele analizei matematice*, Editura științifică și enciclopedică, București, 1977.
- [8] MEGHEA, C., MEGHEA IRINA, *Tratat de calcul diferențial și calcul integral pentru Învățământul Politehnic*, Editura Tehnică, București, 1997.
- [9] NICOLESCU, M., *Analiză matematică*, vol. I, II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1971.
- [10] NICOLESCU, M., SOLOMON, M., Ș.A., *Manual de analiză matematică*, vol. I, II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1962, 1964.
- [11] PRECUPANU ANCA, *Bazele analizei matematice*, Polirom, Iași, 1998.
- [12] RADU, I.C., *Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială*, Editura All, București, 1996.
- [13] ROȘCULEȚ, M., *Analiză matematică*, Editura Tehnică, București, 1996.
- [14] RUS, I.A., *Principii și aplicații ale teoriei punctului fix*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1979.
- [15] SIREȚCHI, GH., *Calcul diferențial și integral*, vol. I, Editura științifică și enciclopedică, București, 1985.
- [16] STĂNĂȘILĂ, O., *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.

- [17] UDRIȘTE, C., TĂNĂSESCU ELENA, *Minime și maxime ale funcțiilor reale de variabile reale*, Editura Tehnică, București, 1980.
- [18] VALTER, O., *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.

Glosar

- acoperire, 50
 - finită, 50
- aderența unei mulțimi, 28
- aplicație liniară, 57
- aria
 - exterioară a unei mulțimi, 190
 - interioară a unei mulțimi, 190
 - unei mulțimi, 190
 - unei suprafețe, 215
- axioma Cantor - Dedekind, 8
- banda lui Möbius, 220
- cardinal, 14
- cel mai mare element, 7
- cel mai mic element, 7
- clan, 189
- coeficienți Fourier, 243
- coeficientul unei contracției, 35
- contracție, 35
- convergență punctuală, 141, 147
- convergență uniformă, 141, 147
- criteriu
 - de comparație la limită, 167
 - de rectificabilitate al lui Jordan, 172
 - general de convergență al lui Cauchy, 143, 148, 165
- criteriu general de convergență al lui Cauchy, 123
- criteriu necesar de convergență, 121
- criteriul
 - Raabe - Duhamel, 136
 - Abel - Dirichlet, 124
 - de comparație, 166
 - de comparație cu inegalități I, 128
 - de comparație cu inegalități II, 130
 - de condensare al lui Cauchy, 130
 - de integrabilitate al lui Darboux, 194
 - Dirichlet-Jordan, 248
 - integral al lui Cauchy, 169
 - lui Abel, 170
 - lui Darboux, 190, 228
 - lui Kummer, 134
 - lui Schwarz, 84
 - majorării, 144, 148
 - monotoniei, 128
 - radical al lui Cauchy, 131
 - raportului al lui D'Alembert, 133
 - Sylvester, 96
- curbă, 175
 - închisă, 175
 - netedă, 175
 - netedă pe porțiuni, 175
 - rectificabilă, 175
- curbe juxtapozabile, 175
- curbele rețelei lui Gauss, 212
- cvasinormă, 23
- derivarea funcțiilor compuse, 75
- derivată parțială, 65
- derivata după o direcție, 71
- derivata unei mulțimi, 28
- difeomorfism, 97
- diferențiala unei funcții, 64
- distanță, 17
- distanța
 - uniformă, 21
- distanța Hamming, 21
- diviziune, 192, 226
- domeniu, 56
 - compact, 192
 - simplu, 198, 200
- drum, 171
 - închis, 171
 - neted, 171
 - neted pe porțiuni, 172
 - rectificabil, 172
- drumuri
 - echivalente, 174
 - juxtapozabile, 172
- ecuațiile parametrizate ale pânzei, 211

egalitatea Parseval-Leapunov, 245

element

de arc, 179

de arie, 194, 215

de volum, 227

exteriorul unei mulțimi, 28

extremitățile unui drum, 171

fața inferioară a unei suprafețe, 219

fața superioară a unei suprafețe, 219

formula

Gauss - Ostrogradsky, 233

lui Green, 201

lui Mac-Laurin, 89, 92

lui Stokes, 222

lui Taylor, 86, 91

formula lui Taylor

cu rest integral, 89

cu rest Cauchy, 89

cu rest Lagrange, 89

cu rest Peano, 87

cu rest Schömllich-Roche, 88

formulele lui Euler-Fourier, 241

frontiera unei mulțimi, 28

funcție

continuă, 43

cu variație mărginită, 172

derivabilă parțial, 65

diferențiabilă, 63

local integrabilă, 163

uniform continuă, 56

funcții implicite, 101

gradient, 67

imaginea unei curbe, 175

imaginea unei pânze, 211

independența de drum, 184

inegalitatea

Cauchy-Buniakovski-Schwarz, 24

lui Bessel, 243

lui Hölder, 19

lui Lagrange, 75

lui Minkowski, 20

infimum, 7

integrala

convergentă, 163

curbilinie în raport cu coordonatele, 180

curbilinie în raport cu lungimea unui arc,
177

de suprafață în raport cu aria, 217

de suprafață în raport cu coordonatele,
220

divergentă, 163

dublă, 194

generalizată, 163

improprie, 163

lui Dirichlet, 245

triplă, 227

interiorul unei mulțimi, 28

interval, 55

închiderea unei mulțimi, 28

izomorfism diferențiabil, 97

lema

intervalelor închise incluse, 12

lui Abel, 151

lui Cesaró, 13

lui Riemann, 245

limită iterată, 49

limita

inferioară, 41

superioară, 41

unei funcții într-un punct, 47

linie poligonală, 56

lungimea unei curbe, 175

lungimea unui drum, 172

măsură, 189

pozitivă, 189

reală, 189

majorant, 7

matricea jacobiană, 66

metoda

celor mai mici pătrate, 114

gradientului, 116

metrică, 17

metrica

Cebâșev, 22

discretă, 20

euclidiană, 18

Manhattan, 18

Minkowski, 19

minorant, 7

mulțime

închisă, 26

cel mult numărabilă, 14

- compactă, 50
- conexă, 54
- densă, 12, 32
- deschisă, 26
- finită, 14
- inductivă, 9
- infinită, 14
- mărginită, 50
- majorată, 7
- minorată, 7
- neconexă, 54
- nenumărabilă, 14
- numărabilă, 14
- ordonată, 7
- mulțimea numerelor reale, 9
- mulțimi echipotente, 13
- natura unei serii, 120
- normă, 23
- nucleul lui Dirichlet, 245
- operator liniar, 57
- operatorul
 - de diferențiere, 85
 - Hamilton, 67
- orientare a unei suprafețe, 219
- pânză parametrizată, 211
- pânze parametrizate echivalente, 211
- poligon
 - exterior, 190
 - interior, 190
- polinom Fourier, 243
- polinom trigonometric, 241
- polinomul lui Taylor, 86
- produs
 - convolutiv, 137
- produs scalar, 24
- proiecție stereografică, 21
- proprietatea lui Arhimede, 11
- punct
 - șă, 95
 - aderent, 28
 - critic, 94
 - de acumulare, 28
 - de extrem condiționat, 105
 - de extrem cu legături, 105
 - de extrem local, 94
 - exterior, 28
 - fix, 35
 - frontieră, 28
 - interior, 28
 - izolat, 28
 - staționar, 94
- raza de convergență, 152
- relație
 - binară, 7
 - de echipotență, 13
 - de ordine, 7
 - de ordine totală, 7
- reprezentarea parametrică a unui drum, 171
- restul seriei, 123
- semidistanță, 17
- semimetrică, 17
- seria
 - binomului generalizat, 160
 - geometrică, 121
 - Mac-Laurin, 160
 - Taylor, 158
- serie
 - absolut convergentă, 125
 - alternată, 124
 - convergentă, 120, 147
 - cu termeni pozitivi, 128
 - de funcții, 147
 - de numere, 119
 - divergentă, 120
 - Fourier, 243
 - produs, 137
 - semiconvergentă, 125
 - trigonometrică, 241
 - uniform convergentă, 147
- serii de puteri, 151
- sferoid deschis, 25
- spațiu
 - Banach, 35
 - metric, 17
 - metric complet, 34
 - prehilbertian, 24
 - tangent, 219
 - topologic, 27
 - vectorial, 22
 - vectorial normat, 24
- subșir, 30
- subacoperire, 50
- suma

Riemann, 192
suma Darboux, 192
suprafață, 211
 netedă, 213
 orientabilă, 219
 simplă, 212
supremum, 7
șir, 30
 convergent, 30
 fundamental, 32
 mărginit, 32
șir de funcții, 141

teorema
 a II-a a lui Abel, 154
 Cauchy-Bolzano, 47
 Cauchy-Hadamard, 152
 Darboux-Bolzano, 46
 funcției inverse, 99
 funcțiilor implicite, Goursat, 101
 Heine, 57
 Heine - Borel, 52
 I a lui Abel, 151
 Kuhn - Tucher, 106
 lui Banach, 35
 lui Dirichlet, 126, 247
 lui Fermat, 94
 lui Leibniz, 124
 Mertens, 137
 Riemann, 126
traietorie de gradient, 117
transformare regulată, 97

urma pânzei, 211
urma unui drum, 171

vecinătate, 25
vector admisibil, 105
volum, 225

Weierstrass, 148